Ueber eine von Steiner gefundene, noch wenig beachtete Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte

und

über Kurven, die mit den einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreisen zusammenhängen.

Inaugural-Dissertation,

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Hermann Starostzik.

ACAD. LEOPOLDAT. BIBL.

Mittwoch, den 3. Juli 1907, mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina:

Vortrag:

Leonhard Euler

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1907.

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät der Königlichen Universität Breslau.

Referent: Prof. Dr. **Sturm**.

Dem Andenken

meiner Mutter.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548224_0038

Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, Beweise zu Lehrsätzen zu liefern, die Jacob Steiner in zwei Abhandlungen im Journal für Mathematik veröffentlichte und die in den zweiten Band seiner gesammelten Werke aufgenommen wurden; und zwar handelt es sich um die Abhandlung „Ueber eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte“ (Crelles Journal, Band XXX. Seite 337—340; Gesammelte Werke, Band II. Seite 351—354) und die Abhandlung „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte“ (Crelles Journal, Band XXXVII. Seite 161—192; Gesammelte Werke, Band II. Seite 389—420, § 2.). Einige Sätze der zweiten Abhandlung finden sich auch in anderen Abhandlungen Steiners, z. B. in den gesammelten Werken, Bd. II. Seite 618—619 und Seite 710—714. Die den Sätzen in Klammern beigefügten Zahlen beziehen sich auf die Stellen, an denen sie in Steiners Werken vorkommen.

Obwohl sich Verfasser des innigen Zusammenhanges der drei Arten der Kegelschnitte bewusst war, so glaubte er doch im Sinne Steiners zu handeln, wenn er der Ellipse, Hyperbel und Parabel zunächst eine besondere Behandlung angedeihen liess.

Inhalt.

Seite

Eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte 9

Ueber Kurven, welche mit den einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreisen zusammenhängen 34

Die Systeme der Kreise, die einen Kegelschnitt doppelt berühren 34

Die Systeme der Kegelschnitte K_1, die einen Kegelschnitt K in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers doppelt berühren 49

Die Systeme der Kegelschnitte K, die einen Kegelschnitt K_1 in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers doppelt berühren 72

Das System der gleichseitigen Hyperbeln, die einen nach Grösse und Lage gegebenen Durchmesser gemeinsam haben 106

Eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte.

Konstruiert man um den einen Brennpunkt F einer Ellipse $\mathfrak{E}$, deren Halbachsen a und b sein mögen, mit dem Radius α den Kreis K_α, so kann man, wenn die Achsenrichtungen der Ellipse als Achsen eines Koordinatensystems genommen werden, leicht die Schnittpunkte beider Kurven analytisch bestimmen. Da nämlich die Gleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

lautet und, falls $a^2 - b^2 = c^2$ ist, die des Kreises

$$(x - c)^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$$

ist, so ergeben sich ohne Mühe die Abscissen je eines Schnittpunktpaares beider Kurven

$$x_1 = \frac{a}{c}(a - \alpha) \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a}{c}(a + \alpha).$$

Von diesen Schnittpunktpaaren ist, wenn nicht beide imaginär sind, nur das eine reell. Denn da die Abscisse eines reellen Schnittes ihrem absoluten Betrage nach kleiner, die eines imaginären Schnittes grösser als die absolute Länge der Halbachse a der Ellipse ist, so ist für einen reellen Schnitt $|a| - |x| > 0$ und für einen imaginären Schnitt $|a| - |x| < 0$, während bei Berührung beider Kurven $|a| - |x| = 0$ ist. Nimmt nun α den grössten brauchbaren Wert $\alpha = a + c$ an, so ist

$$x_1 = -a, \quad \text{also} \qquad |a| - |x_1| = 0;$$

$$x_2 = \frac{a}{c}(2a + c), \qquad |a| - |x_2| = -\frac{2a^2}{c};$$

und erreicht α den kleinsten brauchbaren Wert $\alpha = a - c$, so ergibt sich

$$x_1 = a, \quad \text{also} \qquad |a| - |x_1| = 0;$$
$$x_2 = \frac{a}{c}(2a - c), \qquad |a| - |x_2| = -\frac{2a}{c}(a - c).$$

Somit sind in der Tat, wenn überhaupt reelle Schnittpunkte beider Kurven vorhanden sind, nur zwei der Schnittpunkte reell und zwar die Punkte A, A, deren gemeinsame Abscisse

$$x_A = \frac{a}{c}(a - \alpha)$$

ist. Konstruiert man um F als Mittelpunkt einen zweiten Kreis K_β mit dem Radius β, so sind entsprechend seine reellen Schnittpunkte B, B mit $\mathfrak{E}$ bestimmt durch die Abscisse

$$x_B = \frac{a}{c}(a - \beta).$$

Es seien nun zwei Punkte P und P_1 auf der Hauptachse $S S_1$ der Ellipse $\mathfrak{E}$ gegeben, die zu den Hauptscheiteln S und S_1 harmonisch sind, und zwar liege S zwischen den in Bezug auf $\mathfrak{E}$ konjugierten Punkten P und P_1 und P ausserhalb der Kurve. Sollen dann die den Kreisen K_α und K_β angehörigen Punkte A und B auf einer durch P oder P_1 gezogenen Graden liegen, so müssen P und P_1 zwei Diagonalpunkte des der Ellipse $\mathfrak{E}$ eingeschriebenen Vierecks A A B B sein, also mit den Schnittpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Gegenseiten A A und B B mit $S S_1$ eine harmonische Gruppe bilden. Es muss also die Beziehung bestehen

$$P\mathfrak{A} : P_1\mathfrak{A} = - P\mathfrak{B} : P_1\mathfrak{B},$$

die, wenn p und $p_1 = \frac{a^2}{p}$ die Abscissen von P und P_1 sind und für die Abscissen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die mit ihnen gleichen oben berechneten Abscissen von A und B eingesetzt werden, die Form

$$\frac{\frac{a}{c}(a-\alpha)-p}{\frac{a}{c}(a-\alpha)-p_1}=\frac{p-\frac{a}{c}(a-\beta)}{\frac{a}{c}(a-\beta)-p_1}$$

annimmt. Hieraus folgt schliesslich

$$\alpha\beta-\left\{a-\frac{c}{2a}(p+p_1)\right\}(\alpha+\beta)=-a^2+c(p+p_1)-\frac{c^2}{a^2}\cdot pp_1.$$

Setzt man nun

$$a-\frac{c}{2a}(p+p_1)=r$$

und

$$-a^2+c(p+p_1)-\frac{c^2}{a^2}\cdot pp_1=s,$$

so ist, wie eine einfache Rechnung ergibt,

$$s=\frac{c^2(p-p_1)^2}{4a^2}-r^2.$$

Wird alsdann

$$\frac{c(p-p_1)}{2a}=k$$

gesetzt, so ist

$$s=k^2-r^2;$$

also

$$\alpha\beta-r(\alpha+\beta)=k^2-r^2$$

oder

$$(\alpha-r)(\beta-r)=k^2.$$

Da sowohl r als auch k nur von den Abscissen p und p_1 der Punkte P und P_1 und von den konstanten Grössen a und c abhängen, also bei festgewähltem Punkte P oder P_1 selbst Konstanten sind, so gilt der

Satz: *Sind* P *und* P_1 *zwei feste, in Bezug auf eine Ellipse* & *konjugierte Punkte und auf ihrer Hauptachse* $S S_1$ *so gelegen, dass sie den Scheitel* S *einschliessen, und schneidet eine beliebige durch* P *oder* P_1 *gelegte Sekante die Ellipse in den Punkten* A *und* B, *so besteht, wenn* F *der zu* S *gehörige Brennpunkt von* & *ist, zwischen den Brennstrahlen* $FA=\alpha$ *und* $FB=\beta$ *die Beziehung*

$$(\alpha-r)(\beta-r)=k^2,$$

worin r *und* k *Konstanten sind; und zwar ist, wenn* 2a *und* 2c *die Längen der grossen Achse und der Excentricität von* $\mathfrak{E}$ *bezeichnen und* p *und* p_1 *die Abscissen von* P *und* P_1 *sind,*

$$r = a - \frac{c}{2a}(p + p_1) \quad \text{und} \quad k = \frac{c}{2a}(p - p_1).$$

Liegt nun P ausserhalb der Ellipse $\mathfrak{E}$, so fallen für die von P an die Kurve gelegten Tangenten t, t die Schnittpunkte A, B mit $\mathfrak{E}$ in die Berührungspunkte T, T mit $\mathfrak{E}$, die zugleich die Schnittpunkte der Polare von P mit der Ellipse sind. Ist dann $FT = \tau$, so gilt

$$(1) \qquad (\alpha - r)(\beta - r) = (\tau - r)^2 = k^2.$$

Aus der Abhängigkeit der Grössen r und k von P und P_1 ergibt sich, dass jedem Punktepaare P, P_1 der Hauptachse je ein zugehöriger Wert von r und k entspricht.

Konstruiert man nun um den zweiten Brennpunkt F_1 der Ellipse die durch A, A und B, B gelegten Kreise K_{α_1} und K_{β_1} mit den Radien α_1 und β_1, so gilt bekanntlich

$$\alpha = 2a - \alpha_1; \qquad \beta = 2a - \beta_1; \qquad \tau = 2a - \tau_1.$$

Setzt man diese Werte in die Beziehung (1) ein, so ergibt sich, wenn

$$2a - r = r_1$$

ist,

$$(1') \qquad (\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1) = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2.$$

Demnach besteht der

Satz: *Sind* P *und* P_1 *zwei feste, in Bezug auf eine Ellipse* $\mathfrak{E}$ *konjugierte Punkte, die auf ihrer Hauptachse* $S S_1$ *so liegen, dass sie den Scheitel* S *einschliessen und* P *ausserhalb der Kurve liegt; schneidet ferner eine beliebige durch* P *oder* P_1 *gelegte Sekante die Ellipse in den Punkten* A *und* B *und sind* T, T *die Berührungspunkte der von* P *an* $\mathfrak{E}$ *gelegten Tangenten, so gilt, wenn* F_1 *der nicht zu* S *gehörige Brennpunkt der*

Ellipse ist, zwischen den Brennstrahlen $F_1 A = \alpha_1$, $F_1 B = \beta_1$ *und* $F_1 T = \tau_1$ *die Beziehung*

$$(\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1) = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2,$$

worin die Konstanten

$$r_1 = a + \frac{c}{2a}(p + p_1) \quad \text{und} \quad k = \frac{c}{2a}(p - p_1)$$

sind, wenn p *und* p_1 *die Abscissen von* P *und* P_1 *und* 2a *und* 2c *die Längen der grossen Achse und Excentricität der Ellipse* $\mathfrak{E}$ *bezeichnen.*

Während also in den beiden Beziehungen (1) und (1′) die Grösse k denselben Wert hat, unterscheiden sich die Grössen r und r_1 stets um die Länge 2a der Hauptachse der Ellipse, so dass immer

$$r_1 + r = 2a \tag{2}$$

ist. Ändern daher die auf der Hauptachse der Ellipse $\mathfrak{E}$ liegenden Punkte P und P_1 beständig ihre Lage, doch immer so, dass sie in Bezug auf die Ellipse konjugiert sind, so gehören zu jeder Lage der Punkte drei Konstanten k, r und r_1, von denen die beiden letzten noch die Eigenschaft haben, dass ihre Summe $r + r_1 = 2a$ eine absolute Konstante ist, ihren Wert also trotz der Veränderung der Punkte P und P_1 stets beibehält.

Die beiden gefundenen Sätze können in folgenden Satz zusammengezogen werden.

Satz: *Schneidet eine beliebige Sekante* AB *einer Ellipse* $\mathfrak{E}$ *deren Hauptachse in* P, *so lassen sich stets zwei konstante Grössen* r *und* r_1 *so ermitteln, dass für die von den Brennpunkten* F *und* F_1 *der* $\mathfrak{E}$ *nach den Punkten* A *und* B *gezogenen Brennstrahlen* α, β *und* α_1, β_1

$$(\alpha - r)(\beta - r) = (\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1)$$

und

$$r + r_1 = 2a$$

ist, wenn 2a *die Länge der Hauptachse der Ellipse bezeichnet. (II, 351).*

Legt man nun als ausgezeichnete Sekante der Ellipse die Hauptachse $S S_1$ durch P oder P_1, so sind die Brennstrahlen

$$\alpha = a - c \quad \text{und} \quad \beta = a + c.$$

Die Beziehung (1) lautet dann

$$k^2 = (\tau - r)^2 = (a - r)^2 - c^2. \tag{3}$$

Nun ist aber nach (2)

$$r = 2a - r_1,$$

somit

$$k^2 = (\tau - r)^2 = (a + r_1)^2 - c^2. \tag{3'}$$

Bezeichnet man die Länge PT der vom Punkte P an $\mathfrak{E}$ gelegten Tangente mit t und den Winkel, den sie mit dem Brennstrahl $FT = \tau$ bildet, also den Winkel PTF mit φ, so kann man den Cosinus des Winkels φ berechnen. Ist nämlich Winkel $PTP_1 = \varphi_1$ und Winkel $FTP_1 = \varphi_2$ und wird $TP_1 = h$ gesetzt, so ist

$$\cos\varphi_1 = \frac{h}{t};\ \cos\varphi_2 = \frac{h}{\tau};\ \sin\varphi_1 = \frac{p - p_1}{t};\ \sin\varphi_2 = \frac{c - p_1}{\tau};$$

also

$$\cos\varphi = \frac{h^2}{t\tau} + \frac{(p - p_1)(c - p_1)}{t\tau} = \frac{1}{\tau t}\left\{h^2 + c(p - p_1) - p_1(p - p_1)\right\}.$$

Nun ist

$$p_1 = \frac{a^2}{p},$$

daher

$$p - p_1 = \frac{p^2 - a^2}{p}.$$

Ferner ergibt sich der Wert von h^2 aus der Gleichung der Ellipse $\mathfrak{E}$

als

$$h^2 = \frac{b^2}{p^2}(p^2 - a^2);$$

und da

$$\tau = \frac{a}{p}(p - c)$$

ist, so folgt schliesslich

$$\cos \varphi = \frac{c}{a} \cdot \frac{p^2 - a^2}{p} \cdot \frac{1}{t} = \frac{2k}{t}.$$

Somit ist

$$k = \tau - r = {}^1/_2\, t \cos \varphi. \tag{4}$$

Satz: *Die zwei beliebigen in Bezug auf eine Ellipse konjugierten und auf ihrer Hauptachse liegenden Punkten* P *und* P_1 *entsprechende Konstante k ist daher gleich der halben Projektion des von* P *und dem Berührungspunkt* T *begrenzten Stückes der von* P *an die Ellipse gelegten Tangente auf den Brennstrahl, der von* T *nach dem den Punkten* P *und* P_1 *näheren Brennpunkt* F *gezogen wird.*

Da für

$p = \infty$	$p_1 = 0$	wird, so ist $r = a - \infty$,	$r_1 = a + \infty$;
$p = \frac{a}{c}(a+b)$	$p_1 = \frac{a}{c}(a-b)$	$r = 0$	$r_1 = 2a$;
$p = a$	$p_1 = a$	$r = a - c$	$r_1 = a + c$;
$p = \frac{a}{c}(a-b)$	$p_1 = \frac{a}{c}(a+b)$	$r = 0$	$r_1 = 2a$;
$p = 0$	$p_1 = \infty$	$r = a - \infty$	$r_1 = a + \infty$;

wobei stets $r + r_1 = 2a$ ist. Die Grösse r kann, wie man hieraus sieht, positiv oder negativ sein oder den Wert 0 besitzen. Sie ist negativ für alle Punkte P, deren Abscisse p der Ungleichung $\infty > p > \frac{a}{c}(a + b)$ oder $\frac{a}{c}(a - b) > p > 0$ genügt. Für $p = \frac{a}{c}(a + b)$ und $p = \frac{a}{c}(a - b)$ wird sie gleich Null, während sie für alle Abscissen von $p = \frac{a}{c}(a + b)$ bis $p = \frac{a}{c}(a - b)$ positive Werte annimmt. Ist nun $r = 0$, so erhält (3) die Form

$$k^2 = a^2 - c^2 = b^2,$$

wodurch (1) und, da $r_1 = 2a$ ist, auch (1′) übergeht in

$$\alpha\beta = \tau^2 = b^2. \tag{5}$$

Es besteht daher der

Satz: *Beschreibt man mit der kleinen halben Achse* b *um den Brennpunkt* F *der Ellipse* ℰ *den Kreis, der die Ellipse stets in zwei reellen Punkten* T, T *schneidet, zieht die Sehne* T, T, *die der Hauptachse in* P_1 *begegnet und legt in* T *an die Ellipse die Tangente* TP, *die die Hauptachse in* P *trifft, zieht ferner durch* P *oder* P_1 *eine beliebige Sekante* AB *der Ellipse und nach ihren Schnittpunkten* A *und* B *die Brennstrahlen* FA *und* FB, *so ist das Rechteck aus diesen Strahlen konstant und zwar gleich dem Quadrat der halben kleinen Achse. (II,352).*

Die Grössen k, r und r_1 können endlich noch in etwas andrer Form geschrieben werden. Es war

$$k = \frac{c}{2a}(p - p_1); \qquad r = a - \frac{c}{2a}(p + p_1); \qquad r_1 = a + \frac{c}{2a}(p + p_1).$$

Da nun $p_1 = \frac{a^2}{p}$ ist, so ist

$$k = \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 - a^2}{p}; \qquad r = a - \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 + a^2}{p}; \qquad r_1 = a + \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 + a^2}{p}.$$

Setzt man aber in den Gleichungen $p = \frac{a^2}{p_1}$ ein, so wird

$$k = \frac{c}{2a} \cdot \frac{a^2 - p_1^2}{p_1}; \qquad r = a - \frac{c}{2a} \cdot \frac{a^2 + p_1^2}{p_1}; \qquad r_1 = a + \frac{c}{2a} \cdot \frac{a^2 + p_1^2}{p_1}.$$

Schliesslich können p und p_1 noch durch a, c und k oder a, c und r ausgedrückt werden. Benutzt man die beiden zuletzt gefundenen Werte von k, so folgt aus

dem ersten

$$2akp = cp^2 - ca^2$$

$$p^2 - \frac{2ak}{c} p = a^2$$

$$p = \frac{a}{c}\left\{k \pm \sqrt{k^2 + c^2}\right\}.$$

und dem zweiten

$$2akp_1 = -cp_1^2 + ca^2$$

$$p_1^2 + \frac{2ak}{c} p_1 = a^2$$

$$p_1 = -\frac{a}{c}\left\{k \mp \sqrt{k^2 + c^2}\right\}.$$

Die beiden für r gefundenen Gleichungen ergeben, wie man sofort erkennt, für p dieselben Werte wie für p_1. Es ist

$$2apr = 2a^2p - cp^2 - ca^2$$

$$p^2 - \frac{2a(a-r)}{c} p = -a^2$$

$$p = \frac{a}{c}\left\{a - r \pm \sqrt{(a-r)^2 - c^2}\right\}.$$

Da nun $r + r_1 = 2a$ ist, so ist auch

$$p = \frac{a}{c}\left\{r_1 - a \pm \sqrt{(r_1 - a)^2 - c^2}\right\}.$$

Somit ist

$$(6) \quad k = \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 - a^2}{p} = \frac{c}{2a} \cdot \frac{a^2 - p_1^2}{p_1} = \frac{c}{2a}(p - p_1);$$

$$(7) \quad r = a \mp \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 + a^2}{p} = a \mp \frac{c}{2a} \cdot \frac{p_1^2 + a^2}{p_1} = a \mp \frac{c}{2a}(p + p_1);$$

$$(8) \quad p = \pm \frac{a}{c}\left\{k \pm \sqrt{k^2 + c^2}\right\} = \frac{a}{c}\left\{a - r \pm \sqrt{(a-r)^2 - c^2}\right\}$$

$$= \frac{a}{c}\left\{r_1 - a \pm \sqrt{(r_1 - a)^2 - c^2}\right\};$$

wo die unteren Zeichen in (7) und (8) den Werten von r_1 und p_1 entsprechen. (II., 352.)

Es sei nun eine Hyperbel $\mathfrak{H}$ gegeben, deren Achsen 2a und 2bi und deren lineare Excentricität $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ sei. Sind die Achsenrichtungen von $\mathfrak{H}$ zugleich, die Achsen eines

Koordinatensystems, so ergeben sich die Schnittpunkte von $\mathfrak{H}$ mit einem um den Brennpunkt F mit dem Radius α beschriebenen Kreis K_α aus den Gleichungen

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

und

$$(x - c)^2 + y^2 - \alpha^2 = 0;$$

und zwar sind die Abscissen der Schnittpunktpaare beider Kurven

$$x_1 = \frac{a}{c}(a + \alpha) \text{ und } x_2 = \frac{a}{c}(a - \alpha).$$

Für einen reellen Schnittpunkt ist die Abscisse ihrem absoluten Betrage nach grösser als die absolute Länge der Halbachse a; es ist also $|x| - |a| > 0$. Für einen imaginären Schnittpunkt gilt dagegen $|x| - |a| < 0$, während für einen Berührungspunkt beider Kurven $|x| - |a| = 0$ ist. Da im vorliegenden Falle nur solche Kreise K_α von Wert sind, die mindestens zwei reelle Schnittpunkte mit $\mathfrak{H}$ liefern, so sind alle Kreise ausgeschlossen, deren Radius $\alpha < c - a$ ist. Nimmt der Radius den Wert $\alpha = c - a$ an so ist

$$x_1 = a, \quad \text{also} \quad |x_1| - |a| = 0;$$

$$x_2 = \frac{a}{c}(2a - c), \quad |x_2| - |a| = -\frac{2a}{c}(c - a)$$

Für $\alpha = c$ ergibt sich

$$x_1 = \frac{a}{c}(a + c), \text{ daher } |x_1| - |a| = \frac{a^2}{c};$$

$$x_2 = \frac{a}{c}(a - c), \quad |x_2| - |a| = -\frac{a}{c}(2c - a).$$

Erhält endlich der Radius den Wert $\alpha = c + a$, so wird

$$x_1 = \frac{a}{c}(2a + c), \text{ somit } |x_1| - |a| = \frac{2a^2}{c};$$

$$x_2 = -a, \quad |x_2| - |a| = 0.$$

Demnach liefert bei allen Kreisen K_α die Abscisse x_1 die reellen Schnittpunkte A, A, während x_2 für Kreise mit dem Radius $\alpha = c + a$ und grösserem Radius reelle, mit kleinerem Radius aber imaginäre Schnittpunktpaare A′, A′ liefert. Das stets reelle Schnittpunktpaar gehört nun aber dem Hyperbel-

zweige an, der den Brennpunkt F umschliesst. Schneidet daher ein Kreis K_α den zu dem Brennpunkt F gehörigen Zweig der Hyperbel $\mathfrak{H}$ reell, so ist die Abscisse dieses Schnittpunktpaares A, A

$$x_A = \frac{a}{c}(a + \alpha);$$

und trifft der Kreis den den Brennpunkt F_1 umschliessenden Zweig von $\mathfrak{H}$ in zwei reellen Punkten A′, A′, so ist deren gemeinsame Abscisse

$$x_{A'} = \frac{a}{c}(a - \alpha).$$

Dasselbe gilt für jeden andern um F als Mittelpunkt konstruierten Kreis K_β. Ist β sein Radius, so ist

$$x_B = \frac{a}{c}(a + \beta)$$

die Abscisse des stets reellen Schnittpunktpaares B, B, das dem den Brennpunkt F umschliessenden Hyperbelzweige angehört, während

$$x_{B'} = \frac{a}{c}(a - \beta)$$

die Abscisse des bald reellen, bald imaginären Paares B′, B′, ist, das auf dem andern Zweige liegt.

Es seien nun P und P_1 zwei auf der Hyperbelachse SS_1 gelegene Punkte, die in Bezug auf $\mathfrak{H}$ konjugiert sind. Der Scheitel S liege zwischen P und P_1 und P ausserhalb der Kurve. Sollen dann die auf zwei um F konstruierten Kreisen K_α und K_β liegenden Punkte A und B einer beliebigen durch P oder P_1 gezogenen Graden angehören, so müssen P und P_1 als Diagonalpunkte des der Hyperbel eingeschriebenen Vierecks AABB zu den Schnittpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von SS_1 mit den Gegenseiten AA und BB harmonisch liegen. Es muss also

$$P\mathfrak{A} : P_1\mathfrak{A} = - P\mathfrak{B} : P_1\mathfrak{B}$$

sein. Liegen die Punkte A und B zunächst auf demselben den Brennpunkt F umschliessenden Hyperbelzweige, so sind,

wie oben gezeigt wurde, ihre Abscissen und damit auch die Abscissen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$x_A = \frac{a}{c}(a + \alpha) \quad \text{und} \quad x_B = \frac{a}{c}(a + \beta).$$

Somit ist

$$\frac{a(a + \alpha) - cp}{a(a + \alpha) - cp_1} = \frac{cp - a(a + \beta)}{a(a + \beta) - cp_1};$$

woraus man nach kurzer Umformung erhält

$$\alpha\beta - \left\{\frac{c}{2a}(p + p_1) - a\right\}(\alpha + \beta) = -a^2 + c(p + p_1) - \frac{c^2}{a^2} pp_1.$$

Wird nun

$$\frac{c}{2a}(p + p_1) - a = r$$

und

$$-a^2 + c(p + p_1) - \frac{c^2}{a^2} pp_1 = s$$

gesetzt, so lässt sich leicht nachweisen, dass

$$s = \frac{c^2(p - p_1)^2}{4a^2} - r^2$$

wird. Ist daher

$$\frac{c(p - p_1)}{2a} = k,$$

so lautet die obige Gleichung

$$\alpha\beta - r(\alpha + \beta) = k^2 - r^2$$

oder

$$(\alpha - r)(\beta - r) = k^2.$$

Auch hier hängen die Grössen r und k nur von den Konstanten a und c und den Abscissen p und p_1 der Punkte P und P_1 ab. Demnach gilt der

Satz: *Sind* P *und* P_1 *zwei feste in Bezug auf eine Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *konjugierte Punkte der Hauptachse* SS_1, *die den Hyperbelscheitel* S *einschliessen, und schneidet eine beliebige durch* P *oder* P_1 *gelegte Sekante den zu* S *gehörenden, den Brennpunkt* F *umschliessenden Hyperbelzweig in den Punkten* A *und* B, *so besteht zwischen den Brennstrahlen* $FA = \alpha$ *und* $FB = \beta$ *die Beziehung*

$$(\alpha - r)(\beta - r) = k^2,$$

wo r *und* k *Konstanten sind und zwar ist*

$$r = \frac{c}{2a}(p + p_1) - a \text{ und } k = \frac{c}{2a}(p - p_1),$$

wenn p *und* p_1 *die Abscissen der Punkte P und* P_1 *sind und* 2a *und* 2c *die Längen der Hauptachse und der Excentricität der* $\mathfrak{H}$ *bezeichnen.*

Für die von P an die Hyperbel gelegten Tangenten t, t fallen je die beiden Schnittpunkte A, B mit $\mathfrak{H}$ in den einen und andern Schnittpunkt der Polare TT von P mit der Hyperbel. Ist dann FT = τ, so gilt

(1a) $$(\alpha - r)(\beta - r) = (\tau - r)^2 = k^2.$$

Gehört aber der Punkt A dem den Punkt F umschliessenden und der Punkt B dem andern Hyperbelzweige an, so ist die Abscisse von A und $\mathfrak{A}$

$$x_A = \frac{a}{c}(a + \alpha)$$

und die von B und $\mathfrak{B}$

$$x_B = \frac{a}{c}(a - \beta).$$

In der Beziehung (1a) muss also dann β durch — β ersetzt werden. Somit ergibt sich in diesem Falle

(1b) $$(r - \alpha)(r + \beta) = (\tau - r)^2 = k^2.$$

Es besteht demnach der

Satz: *Sind zwei feste in Bezug auf eine Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *konjugierte Punkte* P *und* P_1 *auf der Hauptachse* SS_1 *so gelegen, dass sie den Scheitel* S *einschliessen und* P *ausserhalb der Kurve liegt, ist ferner* T *der Berührungspunkt der von* P *an* $\mathfrak{H}$ *gelegten Tangente und schneidet eine beliebige durch* P *oder* P_1 *gezogene Sekante den zu* S *gehörenden, den Brennpunkt* F *umschliessenden Hyperbelzweig in* A *und den andern Zweig in* B, *so besteht zwischen den Brennstrahlen* FA = α, FB = β *und* FT = τ *die Beziehung*

$$(r - \alpha)(r + \beta) = (\tau - r)^2 = k^2,$$

worin r *und* k *Konstanten sind, die die Werte*

$$r = \frac{c}{2a}(p + p_1) - a \text{ und } k = \frac{c}{2a}(p - p_1)$$

besitzen, wenn 2a *und* 2c *die Abstände der Scheitel* S *und* S_1 *und der Brennpunkte* F *und* F_1 *der Hyperbel und* p *und* p_1 *die Abscissen der Punkte P und* P_1 *bezeichnen.*

Der letzte Fall endlich, bei dem die Punkte A und B auf dem den Brennpunkt F_1 umgebenden Hyperbelzweige liegen, ist bei der angenommenen Lage der Punkte P und P_1 nicht möglich; denn P und P_1 werden dann von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht getrennt, weshalb Harmonicität nicht eintreten kann.

Konstruiert man nun um den andern Brennpunkt F_1 der Hyperbel $\mathfrak{H}$ die durch A, A und B, B gelegten Kreise K_{α_1} und K_{β_1}, so stehen deren Radien $F_1 A = \alpha_1$ und $F_1 B = \beta_1$ in Abhängigkeit zu den Radien α und β der Kreise K_α und K_β. Da im ersten Falle sowohl A als auch B dem Hyperbelzweig angehören, dessen zugehöriger Brennpunkt F ist, so ist

$$\alpha = \alpha_1 - 2a \qquad \text{und} \qquad \beta = \beta_1 - 2a.$$

Da auch $\tau = \tau_1 - 2a$ ist, so ergibt sich aus (1a), wenn

$$2a + r = r_1$$

gesetzt wird, die Beziehung

(1a′) $$(\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1) = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2.$$

Hierin ist τ_1 der Brennstrahl, der F_1 mit dem Berührungspunkt T der von P an $\mathfrak{H}$ gelegten Tangente verbindet.

Im zweiten Falle ist A ein Punkt des den Punkt F umschliessenden Hyperbelzweiges, während B auf dem andern Zweige liegt. Es ist also dann

$$\alpha = \alpha_1 - 2a; \quad \beta = 2a + \beta_1 \quad \text{und} \quad \tau = \tau_1 - 2a.$$

Mit diesen Werten geht (1b), wenn wieder $2a + r = r_1$ ist, über in

(1b′) $$(r_1 - \alpha_1)(r_1 + \beta_1), = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2.$$

Damit gilt der

Satz: *Liegen zwei in Bezug auf eine Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *konjugierte Punkte* P *und* P_1 *auf deren Hauptachse* SS_1 *so, dass sie den Scheitel* S *einschliessen und* P *ausserhalb der Kurve fällt, und schneidet eine beliebige durch* P *oder*

P_1 *gelegte Sekante den Hyperbelzweig, auf dem* S *liegt und zu dem der Brennpunkt* F *gehört, in den Punkten* A *und* B, *so besteht zwischen den von dem andern Brennpunkt* F_1 *ausgehenden Brennstrahlen* $F_1A = \alpha_1$ *und* $F_1B = \beta_1$ *die Beziehung*

$$(1a') \qquad (\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1) = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2,$$

worin $\quad r_1 = \frac{c}{2a}(p + p_1) + a$ *und* $k = \frac{c}{2a}(p - p_1)$

Konstanten sind. Trifft hingegen die durch P *oder* P_1 *gezogene Sekante* AB *die Hyperbel so, dass* A *ein Punkt des den Brennpunkt* F *und* B *ein Punkt des* F_1 *umschliessenden Kurvenzweiges ist, so gilt*

$$(1b') \qquad (r_1 - \alpha_1)(r_1 + \beta_1) = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2,$$

wo sowohl r_1 *als auch* k *denselben Wert wie in* (1a') *besitzt.*

Die bisher bei der Hyperbel gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch in folgender Form kurz wiedergeben.

Satz: *Schneidet eine beliebige Sekante* AB *einer Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *die Hauptachse* $SS_1 = 2a$ *auf der Seite des Mittelpunktes, auf der* F *liegt, so gilt für die von den Brennpunkten* F *und* F_1 *nach den Kurvenpunkten* A *und* B *laufenden Brennstrahlen* α, β *und* α_1, β_1

$$(1) \qquad (\alpha - r)(\beta - r) = (\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1)$$

oder

$$(r - \alpha)(r + \beta) = (r_1 - \alpha_1)(r_1 + \beta_1),$$

je nachdem der Punkt B *mit* A *auf dem zu dem Scheitel* S *gehörigen Zweige der Hyperbel oder auf dem andern Zweige liegt. Hierbei sind r und* r_1 *Konstanten, die durch die Gleichung*

$$(2) \qquad r_1 - r = 2a$$

verbunden sind. (II., 353.)

Eine ausgezeichnete durch P oder P_1 laufende Sekante AB der Hyperbel ist die Hauptachse SS_1. Da dann

$$\alpha = c - a \qquad \text{und} \qquad \beta = c + a$$

ist, so lautet in diesem Falle — S und S_1 gehören verschiedenen Zweigen der $\mathfrak{H}$ an — die dann geltende Beziehung (1b)

(3) $k^2 = (\tau - r)^2 = (a + r)^2 - c^2.$

Nun ist aber nach (2) $r = r_1 - 2a$, also

(3′) $k^2 = (\tau - r)^2 = (r_1 - a)^2 - c^2.$

Eine zweite besondere Sekante durch P oder P_1 ist die zu einer der beiden Asymptoten der Hyperbel gezogene Parallele. Schneidet diese Grade den zu F gehörigen Kurvenzweig in R und den andern Zweig in Q, so ist der Brennstrahl $FR = \rho$ von endlicher Länge, der Brennstrahl $FQ = \varkappa$ aber unendlich gross. Formt man daher (1b) nach Einsetzung der Grössen ρ und $\varkappa$ so um, dass die unendlich grosse Grösse $\varkappa$ Nenner der entstehenden Brüche wird, so erhält man aus

$$(r - \rho)(r + \varkappa) = k^2$$

$$(r - \rho)\left(\frac{r}{\varkappa} + 1\right) = \frac{k^2}{\varkappa}$$

oder $r = \rho$, also $FR = r$.

Da nun nach (2) $r_1 - r = 2a$ ist, so ist, wenn $F_1R = \rho_1$ gesetzt wird,

$$r_1 = \rho_1, \text{ somit } F_1R = r_1.$$

Damit ist man bei der Hyperbel in der Lage, die Grössen r und r_1 leicht zu konstruieren.

Satz: *Zieht man durch einen der Punkte* P *oder* P_1 *zu der einen der beiden Asymptoten der Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *die Parallele, welche die Hyperbel in* R *schneidet, so sind die nach* R *laufenden Brennstrahlen* $FR = r$ *und* $F_1R = r_1$ *die im Vorangehenden so benannten Grössen*

$$r = \frac{c}{2a}(p + p_1) - a \text{ und } r_1 = \frac{c}{2a}(p + p_1) + a. \text{ (II., 353).}$$

Trifft PR die in P_1 auf SS_1 errichtete Senkrechte, welche die Polare von P ist, in U, so folgt aus der Harmonicität der Punkte P, U, Q, R sofort $PR = RU$. Nun sind aber

$$x_P = p \text{ und } y_P = 0$$

die Koordinaten von P und, wie man leicht ermittelt,

$$x_U = p_1 \text{ und } y_U = \frac{b}{a}(p_1 - p)$$

die von U. Also hat die Mitte R von PU von dem Punkt P den Abstand

$$PR=\frac{1}{2}PU=\frac{1}{2}\sqrt{(p-p_1)^2+\frac{b^2}{a^2}(p-p_1)^2}=\frac{c}{2a}(p-p_1)=k.$$

Satz: *Zieht man durch den Punkt* P *oder* P_1 *zu einer der beiden Asymptoten der Hyperbel die Parallele, die der Kurve in* R *begegnet, so ist die Strecke*

$$PR=k=\frac{c}{2a}(p-p_1).$$

Somit kann man im Falle der Hyperbel auch die Grösse k ohne Mühe konstruieren.

Mit diesen Ergebnissen kann man die vorhin gefundenen auch wie folgt formulieren.

Satz: *Es seien* P *und* P_1 *zwei in Bezug auf eine Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *konjugierte Punkte, die auf der Hauptachse* SS_1 *so liegen, dass sie den Scheitel* S *einschliessen, und* R *der Schnittpunkt der durch* P *oder* P_1 *zu der einen Asymptote gezogenen Parallele mit der Kurve. Schneidet dann eine beliebige durch* P *oder* P_1 *gelegte Sekante den Hyperbelzweig, der zu* S *gehört, in den Punkten* A *und* B *und trifft der um den zugehörigen Brennpunkt* F *mit dem Radius* FR *konstruierte Kreis die Brennstrahlen* FA *und* FB *in* C *und* D, *so ist stets*

$$AC\cdot BD=PR^2;$$

und sind C_1 *und* D_1 *die Schnittpunkte von* F_1A *und* F_1B *mit dem um den andern Brennpunkt* F_1 *mit dem Radius* F_1R *beschriebenen Kreise, so gilt*

$$AC_1\cdot BD_1=PR^2.$$

Schneidet jedoch die Sekante AB *die Hyperbel so, dass* A *dem den Brennpunkt* F *und* B *dem den Brennpunkt* F_1 *umschliessenden Zweige angehört, und trifft der um* F *mit* FR *beschriebene Kreis die Verlängerungen von* FA *in* C *und von* BF *in* D, *so ist*

$$AC\cdot BD=PR^2,$$

und

$$AC_1\cdot BD_1=PR^2,$$

wenn C_1 *und* D_1 *die Schnittpunkte der Verlängerungen von* F_1A *und* BF_1 *mit dem um* F_1 *mit* F_1R *als Radius gezeichneten Kreise sind.*

Bezeichnet man das Stück PT der von P an $\mathfrak{H}$ gelegten Tangente mit t und den Winkel PTF mit φ, so kann man, wenn Winkel $PTP_1 = \varphi_1$, Winkel $FTP_1 = \varphi_2$ und $P_1T = h$ gesetzt wird, leicht einen einfachen Ausdruck für $\cos\varphi$ finden. Es ist nämlich

$$\cos\varphi_1 = \frac{h}{t};\ \cos\varphi_2 = \frac{h}{\tau};\ \sin\varphi_1 = \frac{p_1 - p}{t};\ \sin\varphi_2 = \frac{p_1 - c}{\tau};$$

$$\text{also}\quad \cos\varphi = \frac{1}{t\tau}\left\{ h^2 + p_1 (p_1 - p) - c\,(p_1 - p)\right\}.$$

Nun ist aber

$$p_1 - p = \frac{a^2 - p^2}{p},$$

und da sich für h^2 aus der Gleichung der Hyperbel der Wert

$$h^2 = \frac{b^2}{p^2}(a^2 - p^2)$$

ergibt und

$$\tau = \frac{a}{p}(p - c)$$

ist, so erhält man

$$\cos\varphi = \frac{c}{a}\cdot\frac{p^2 - a^2}{p}\cdot\frac{1}{t} = \frac{2k}{t},$$

$$(4)\qquad k = \tau - r = \frac{1}{2}\,t\cos\varphi.$$

Versteht man daher unter der Länge der von einem Punkte P an eine Kurve gelegten Tangente das von dem Punkt P und dem Berührungspunkt T mit der Kurve begrenzte Stück PT, so gilt der

Satz: *Die zwei beliebigen in Bezug auf eine Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *konjugierten Punkten* P *und* P_1 *der Hauptachse entsprechende Konstante* k *ist gleich der halben Projektion der von P an* $\mathfrak{H}$ *gelegten Tangente* PT *auf den Brennstrahl, der den den Punkten P und* P_1 *näheren Brennpunkt mit* T *verbindet.*

Die Grössen r und r_1 werden bei der Hyperbel im Gegensatz zur Ellipse niemals negativ. Denn ist

$p = \infty$, also $p_1 = 0$, so ist $r = \infty - a$ und $r_1 = \infty + a$; $r_1 - r = 2a$;
$p = a$ $p_1 = a$ $r = c - a$ $r_1 = c + a$; $r_1 - r = 2a$;
$p = 0$ $p_1 = \infty$ $r = \infty + a$; $r_1 = \infty - a$; $r_1 - r = 2a$.

Ebenso gibt es keine reellen Punkte P, P_1, für die r oder r_1 gleich Null ist. Denn wäre $r = 0$ oder $r_1 = 0$, so wäre

$$cp^2 + ca - 2a^2p = 0 \qquad \text{oder} \qquad cp^2 + ca + 2a^2p = 0$$

$$p^2 - \frac{2a^2}{c}p = -a^2 \qquad p^2 + \frac{2a^2}{c}p = -a^2$$

$$p = \frac{a}{c}(a \pm bi) \qquad p = \frac{-a}{c}(a \mp bi).$$

Die Werte $r = 0$ und $r_1 = 0$ kommen somit nur imaginären Punkten zu.

Auch bei der Hyperbel können die Grössen k, r und p in etwas andrer Form angegeben werden, nämlich

$$(6) \qquad k = \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 - a^2}{p} = \frac{c}{2a} \cdot \frac{a^2 - p_1^2}{p_1} = \frac{c}{2a}(p - p_1);$$

$$(7) \qquad r = \frac{c}{2a} \cdot \frac{p^2 + a^2}{p} \mp a = \frac{c}{2a} \cdot \frac{a^2 + p_1^2}{p_1} \mp a = \frac{c}{2a}(p + p_1) \mp a;$$

$$(8) \qquad p = \pm\frac{a}{c}\left\{k \pm \sqrt{k^2 + c^2}\right\} = \frac{a}{c}\left\{a + r \pm \sqrt{(a + r)^2 - c^2}\right\}$$
$$= \frac{a}{c}\left\{r_1 - a \pm \sqrt{(r_1 - a)^2 - c^2}\right\}.$$

Es bleibt nunmehr nur noch der Fall der Parabel zur Besprechung übrig. Werden die Achse und die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{P}$ als Achsen eines Koordinatensystems genommen, so ist

$$y^2 = 2\pi x$$

die Gleichung von $\mathfrak{P}$, wenn 2π den Parameter, die Länge der auf der Achse senkrechten Brennpunktssehne bezeichnet.

Konstruiert man dann um den Brennpunkt F der Parabel mit dem Radius α den Kreis K_α, so ist

$$(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = \alpha^2$$

seine Gleichung. Hieraus kann man leicht die Schnittpunkte beider Kurven bestimmen; und zwar sind die Abscissen der Schnittpunktpaare

$$x = -\frac{\pi}{2} \pm \alpha,$$

oder $x_1 = \alpha - \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$,

von denen, wie man sofort sieht, x_1 die allein reellen Schnittpunkte liefert, wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist. Für die reellen Schnittpunkte A, A des Kreises K_α mit $\mathfrak{P}$ ist also

$$x_A = \alpha - \frac{\pi}{2};$$

und für jeden andern Kreis K_β, der den Punkt F zum Mittelpunkt hat und dessen Radius β ist, ist entsprechend die gemeinsame Abscisse der reellen Schnittpunkte B,B mit der Parabel $\mathfrak{P}$

$$x_B = \beta - \frac{\pi}{2}.$$

Es seien nun auf der Parabelachse zwei Punkte P und P_1 gegeben, die in Bezug auf $\mathfrak{P}$ konjugiert sind, also zu dem Parabelscheitel S symmetrisch liegen, und zwar sei P der ausserhalb der Kurve gelegene Punkt. Sollen dann die den Kreisen K_α und K_β angehörenden Punkte A und B auf einer durch P oder P_1 laufenden Graden liegen, so müssen P, P_1 und die Schnittpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Graden AA und BB mit der Achse eine harmonische Gruppe bilden. Es muss also die Proportion gelten

$$P\mathfrak{A} : P_1\mathfrak{A} = -P\mathfrak{B} : P_1\mathfrak{B}.$$

Wird nun die Abscisse von P mit p bezeichnet, so ist — p die von P_1, und da die Abscissen von A und B mit denen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen, so lautet die vorliegende Gleichung

$$\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} - p}{\alpha - \frac{\pi}{2} + p} = \frac{p - \beta + \frac{\pi}{2}}{\beta - \frac{\pi}{2} + p},$$

aus der sich nach kurzer Rechnung

$$(\alpha - \tfrac{\pi}{2})\ (\beta - \tfrac{\pi}{2}) = p^2$$

ergibt. Somit gilt der

Satz; *Sind* P *und* P_1 *zwei feste auf der Achse einer Parabel* $\mathfrak{P}$ *in Bezug auf ihren Scheitel* S *symmetrisch gelegene Punkte und schneidet eine beliebige durch* P *oder* P_1 *gelegte Grade die Parabel in* A *und* B, *so besteht zwischen den nach den Schnittpunkten laufenden Brennstrahlen* $FA = \alpha$ *und* $FB = \beta$ *die Beziehung*

$$(\alpha - e)\ (\beta - e) = d^2,$$

worin e *und* d *Konstanten sind, und zwar ist* 2e *gleich dem Halbparameter* π *der Parabel und* d *gleich dem Abstande des Punktes* P *oder* P_1 *vom Scheitel* S. *(II, 353.)*

Im Falle der Parabel hängt somit die Grösse e, die bei Ellipse und Hyperbel mit r bezeichnet wurde, nicht mehr von den Abscissen der Punkte P und P_1 ab. Sie ist eine absolute Konstante, behält also ihren Wert bei allen Lagen der Punkte P und P_1 bei.

Da für die von P an die Parabel $\mathfrak{P}$ gelegten Tangenten die Schnittpunkte A und B mit der Kurve je in den Berührungspunkt T fallen, so gilt, falls $FT = \tau$ gesetzt wird,

(1) $$(\alpha - e)\ (\beta - e) = (\tau - e)^2 = d^2.$$

Diese Beziehung kann auch rein geometrisch geformt werden. Für die Parabel $\mathfrak{P}$ ist nämlich die Entfernung des Brennpunktes F vom Scheitel S gleich der Hälfte des Halbparameters π, also $FS = \frac{\pi}{2} = e$. Konstruiert man daher um F als Mittelpunkt mit der Strecke FS als Radius den Kreis, der die Brennstrahlen FA, FB und FT in A_1, B_1 und T_1 schneidet, so ist

$$AA_1 . BB_1 = TT_1^2 = SP^2 = SP_1^2.$$

Dies gibt den

Satz: *Beschreibt man um den Brennpunkt* F *der Parabel* $\mathfrak{P}$ *mit seinem Abstand* e *vom Scheitel* S *den Kreis, der die von* F *nach zwei beliebigen Kurvenpunkten* A *und* B *gezogenen Brennstrahlen in* A_1 *und* B_1 *schneidet, und bringt die Sehne* AB *mit der Parabelachse zum Schnitt in* P, *so ist das Rechteck aus den zwischen der Parabel und dem Kreise gelegenen Abschnitten der beiden Brennstrahlen gleich dem Quadrate des Abstandes des Punktes* P *vom Parabelscheitel* S, *also*

$$AA_1 . BB_1 = SP^2.$$

Ist ferner T *der Berührungspunkt der von* P *an die Parabel* $\mathfrak{P}$ *gelegten Tangente, so ist das eben erwähnte Rechteck oder Quadrat auch gleich dem Quadrat des zwischen den genannten Kurven liegenden Abschnittes* TT_1 *des Brennstrahles* FT, *demnach*

$$AA_1 . BB_1 = TT_1 = SP^2.$$

(II., 353.)

Schneidet nun die Leitlinie l der Parabel $\mathfrak{P}$ die Achse im Punkte G, so ist bekanntlich GS = SF, und legt man in A an die Kurve die Tangente, so trifft sie die Parabelachse in einem Punkte A_0 so, dass $A_0S = S\mathfrak{A}$ ist, wo $\mathfrak{A}$ wieder den Schnittpunkt der zur Achse senkrechten Parabelsehne AA mit der Achse bezeichnet. Aus beiden Gleichungen folgt

$$A_0S + SF = GS + S\mathfrak{A}$$

oder

$$A_0F = G\mathfrak{A}.$$

Nun ist aber laut Eigenschaft der Parabel

$$G\mathfrak{A} = FA,$$

also

$$A_0F = FA = \alpha \text{ und } A_0S = \alpha - e.$$

Ist entsprechend B_0 der Schnittpunkt der in B an die Parabel gelegten Tangente mit der Achse, so ist

$$B_0F = FB = \beta \text{ und } B_0S = \beta - e.$$

Da endlich SP = d ist, so ist nach (1)

$$A_0S \cdot B_0S = SP^2;$$

und es besteht der

Satz: *Treffen die in zwei beliebigen Punkten* A *und* B *einer Parabel* $\mathfrak{P}$ *an die Kurve gelegten Tangenten die Achse*

in A_0 *und* B_0, *so ist das Rechteck aus den Abständen der Punkte* A_0 *und* B_0 *vom Scheitel* S *der Parabel gleich dem Quadrat des Abstandes des Punktes* S *vom Schnittpunkt* P *der Graden* AB *mit der Achse.*

Fällt man alsdann von dem Schnittpunkt U der in A und B an die Parabel gelegten Tangenten das Lot UR auf die Parabelachse, so ist UR die Polare von P; also ist PS = SR.

Satz: *Der Fusspunkt* R *des vom Schnittpunkt* U *der Tangenten in zwei beliebigen Punkten* A *und* B *einer Parabel* $\mathfrak{P}$ *auf die Achse gefällten Lotes bestimmt mit dem Scheitel* S *der Parabel eine Strecke* SR, *welche mittlere Proportionale zu den Abständen des Scheitels* S *von den Schnittpunkten* A_0 *und* B_0 *der Tangenten in* A *und* B *ist. (II., 354.)*

Auch bei der Parabel steht die Grösse d in einer einfachen Beziehung zu dem Cosinus des Winkels, der von der Tangente im Kurvenpunkte T und dem nach T laufenden Brennstrahl gebildet wird. Trifft die Tangente die Achse in P, so ist, wie oben bewiesen wurde, PF = FT, also Winkel FTP = FPT = φ. Da nun die von T auf die Achse gefällte Senkrechte der Achse in dem in Bezug auf den Scheitel S zu P symmetrischen Punkte P_1 begegnet, also $PP_1 = 2p$ ist, so ist, wenn noch PT = t gesetzt wird,

$$\cos \varphi = \frac{2p}{t}$$

oder

$$2p = t \cos \varphi.$$

Somit gilt der

Satz: *Die Projektion der Tangente in einem Punkte einer Parabel* $\mathfrak{P}$ *auf den zugehörigen Leitstrahl ist gleich dem doppelten Abstand des Scheitels vom Schnittpunkt der Tangente mit der Achse.*

Das vorliegende Problem lässt sich noch auf andre Weise behandeln. Liegen nämlich zwei Kegelschnitte K und

K_1 vor, so gibt es bekanntlich drei Paare gemeinsamer Sekanten und drei Paare von Schnittpunkten gemeinsamer Tangenten, die nach Chasles [1]) Umbilicalpunkte genannt werden. Sowohl jene Graden als auch diese Punkte sind paarweise reell oder imaginär, und jedem Paare gemeinsamer Sekanten entspricht vermöge gewisser Beziehungen ein bestimmtes Paar der Umbilicalpunkte. Denn je zwei gepaarte gemeinsame Sekanten der beiden Kegelschnitte schneiden sich in einem Eckpunkt des gemeinsamen Polardreiecks $O_1 O_2 O_3$ beider Kurven, während je zwei Umbilicalpunkte eines Paars auf einer seiner Seiten gelegen sind. Nach Chasles entsprechen nun den beiden auf $O_1 O_2$ liegenden Umbilicalpunkten die beiden durch O_3 laufenden gemeinsamen Sekanten.

Ist nun im speziellen Falle K eine Ellipse $\mathfrak{E}$ und K_1 ein um den Brennpunkt F als Mittelpunkt beschriebener reell schneidender Kreis K_α, so ist nur eine Seite und der gegenüberliegende Eckpunkt des gemeinsamen Polardreiecks beider Kurven reell, nämlich die Verbindungslinie MF der Mittelpunkte von $\mathfrak{E}$ und K_α und der unendlich ferne Punkt in dazu senkrechter Richtung P_∞. Der eine der beiden auf MF liegenden Umbilicalpunkte ist der Schnittpunkt U der beiden gemeinsamen reellen Tangenten, während der andre der Punkt F ist. Denn die von F an K_α gelegten Tangenten fallen mit den an $\mathfrak{E}$ gehenden Tangenten zusammen, da sie die von F nach den absoluten Punkten der Ebene laufenden Strahlen sind. Mithin entsprechen den Punkten U und F die beiden durch P_∞ gezogenen gemeinsamen Sekanten von $\mathfrak{E}$ und K_α, die bekanntlich reell sind. Nach Chasles [2]) lassen sich nun aber zwei beliebige Kegelschnitte in einander überführen durch eine Homologie, deren Zentrum ein Umbilicalpunkt und deren Achse die eine der beiden ihm im obigen Sinne entsprechenden gemeinsamen Sekanten der beiden Kurven ist. Mithin bestehen auch im vorliegenden Falle

[1]) Traité des Sections coniques, Seite 237, Nr. 360.
[2]) eben dort, Seite 240, Nr. 363.

zwei derartige Homologieen, die beide den Brennpunkt F zum Zentrum haben. Schneidet nun die Grade UF die durch die reellen Schnittpunkte von $\mathfrak{E}$ und K_α laufende gemeinsame Sekante s_1 in Q_1 und sind S_1, S und V_1, V ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{E}$ und K_α, — S_1 und V_1 liegen auf der einen, S und V auf der andern Seite von Q_1 — so gilt vermöge der Homologie, deren Achse s_1 ist,

$$FSQ_1S_1 \overline{\wedge} FVQ_1V_1,$$

oder $$SS_1 \cdot VQ_1 \cdot FV_1 = VV_1 \cdot SQ_1 \cdot FS_1.$$

Ist nun $S_1M = MS = a$, $MF = c$, $V_1F = FV = \alpha$ und $MQ_1 = x_1$, so ergibt sich als Abstand der Achse s_1, also der gemeinsamen ersten Sekante von $\mathfrak{E}$ und K_α, von M

$$x_1 = \frac{a}{c}(a - \alpha).$$

Ist ferner Q_2 der Schnittpunkt der zweiten reellen gemeinsamen Sekante s_2 der beiden Kurven mit UF, so erhält man in der zweiten Homologie, die s_2 als Achse besitzt,

$$FSQ_2S_1 \overline{\wedge} FV_1Q_2V,$$

mithin $$SS_1 \cdot V_1Q_2 \cdot FV = V_1V \cdot SQ_2 \cdot FS_1.$$

Aus dieser Beziehung folgt nach Einsetzung der obigen Werte, wenn noch MQ_2 mit x_2 bezeichnet wird,

$$x_2 = \frac{a}{c}(a + \alpha).$$

Da, wie man sofort sieht, die zweite Sekante des Kreises und der Ellipse sich einfach dadurch ergibt, dass man α durch $-\alpha$ ersetzt, so kann man sich auf die erste Formel beschränken.

Ist daher α der Radius eines um den Brennpunkt F der Ellipse $\mathfrak{E}$ beschriebenen reell schneidenden Kreises K_α, so ist die Abscisse seiner Schnittpunkte A, A mit $\mathfrak{E}$ gegeben durch

$$x_A = \frac{a}{c}(a - \alpha).$$

Ueber Kurven, welche mit den einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreisen zusammenhängen.

Die Systeme der Kreise, die einen Kegelschnitt doppelt berühren.

Wie die bisherigen Untersuchungen sich vorwiegend mit Kreisen beschäftigten, deren Mittelpunkt ein Brennpunkt eines Kegelschnitts war, so sollen andre Systeme von Kreisen der Gegenstand der nun folgenden Untersuchungen sein: nämlich die Systeme von Kreisen, die einen Kegelschnitt doppelt berühren.

Es liege zunächst eine Ellipse $\mathfrak{E}$ vor, deren Achsen 2a und 2b und deren lineare Excentricität 2c sei. Legt man dann durch einen beliebigen Punkt P der Kurve und durch die beiden Brennpunkte F und F_1 den Kreis K^0, der die kleine Achse der Ellipse in den Punkten N und T schneidet, so halbieren NP und TP die von den Brennstrahlen FP und PF_1 gebildeten Winkel. Also sind NP und TP Normale und Tangente der Ellipse im Punkte P. Ist D der Schnittpunkt von NP mit FF_1, so ist nach dem Sehnensatz im Kreise K^0

$$FD \cdot DF_1 = ND \cdot DP.$$

Fällt man ferner FG senkrecht zu TP, so ist G als Fusspunkt eines von einem Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Lotes ein Punkt des mit der Ellipse konzentrischen Kreises, der durch die Hauptscheitel S und S_1 hindurchgeht. Ist daher M der Mittelpunkt der Ellipse, so ist $MG = a$. Da aber nach einem bekannten Satze MG parallel zu F_1P ist, so ist

Winkel $FNP = FF_1P = FMG$ und Winkel $NPF = F_1PN = MGF$.

Mithin stimmen die beiden Dreiecke PFN und GFM in zwei Winkeln überein, sind somit ähnlich. Daraus ergibt sich die Proportion

$$NP : NF = MG : MF = a : c.$$

Ist nun PQ senkrecht zu NT, so folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken NPT und NFT

$$NP^2 = NQ \cdot NT \qquad \text{und} \qquad NF^2 = NM \cdot NT.$$

Folglich ist $NP^2 : NF^2 = NQ : NM = a^2 : c^2$

oder $NQ - NM : NM = a^2 - c^2 : c^2,$

also $MQ : NM = b^2 : c^2.$

Nun ist aber $MQ : NM = DP : ND,$

also auch $DP : ND = b^2 : c^2$

oder
$$ND = \frac{c^2}{b^2} \cdot DP.$$

Setzt man diesen Wert in die zuerst abgeleitete Gleichung ein, so ist

$$FD \cdot DF_1 = \frac{c^2}{b^2} \cdot DP^2,$$

also
$$DP^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot FD \cdot DF_1.$$

Nun ist aber D als Punkt der Kurvennormale in P Mittelpunkt eines die Ellipse $\mathfrak{E}$ in P berührenden Kreises und da D der Achse angehört, Zentrum eines die Kurve doppelt berührenden Kreises. Somit gilt der

Satz: *Jeder auf der Hauptachse einer Ellipse* $\mathfrak{E}$ *gelegene Punkt* D *ist Mittelpunkt eines die Ellipse doppelt berührenden Kreises* K, *zwischen dessen Radius* r *und den Entfernungen seines Mittelpunktes* D *von den Brennpunkten* F *und* F_1 *der Ellipse stets die Beziehung*

$$r^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot FD \cdot DF_1$$

besteht, wenn 2b und 2c die Längen der kleinen Achse und der linearen Excentricität bezeichnen[1]*).*

Es sei nun $MD = x$, dann ist $FD = c + x$ und $DF_1 = c - x$,

also
$$r^2 = \frac{b^2}{c^2} (c^2 - x^2).$$

---

[1]) Zum Vergleich: Rudolf Schüssler: „Ueber Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren." Arch. d. Math. u. Phys. III. R. 2. 1902. Seite 2.

Ferner sei QP = p der Abstand der Berührungssehne des Kreises K und der Ellipse $\mathfrak{E}$ von M. Dann gilt

$$QP : MD = NQ : NM = a^2 : c^2.$$

Es ist also $$p = QP = \frac{a^2}{c^2} MD = \frac{a^2}{c^2} x.$$

Damit kann man für verschiedene Lagen von D die Radien der doppelt berührenden Kreise, deren Mittelpunkte sie sind, und die Entfernungen ihrer Berührungssehnen von M berechnen. Ist x = 0, so ist r = b und p = 0. Der Radius des die Ellipse $\mathfrak{E}$ doppelt berührenden Kreises K, dessen Mittelpunkt in den Mittelpunkt M von $\mathfrak{E}$ fällt, ist somit gleich der Hälfte der kleinen Achse der Kurve, die zugleich die Berührungssehne ist. Dieser Kreis ist der grösste aller derartigen Kreise; denn wird x grösser, so wird r kleiner und p grösser. Während also die Kreise K kleiner werden, vergrössert sich der Abstand ihrer Berührungssehne mit $\mathfrak{E}$ vom Mittelpunkt M. Ist $x = \pm c$, so ist r = 0 und $p = \pm \frac{a^2}{c}$. Der Radius des Kreises K also, dessen Mittelpunkt der Brennpunkt F oder F_1 von $\mathfrak{E}$ ist, ist unendlich klein, und seine imaginär begrenzte Berührungssehne ist die zugehörige Leitlinie. Wächst x noch weiter, so wird r^2 negativ, also r imaginär, während p stets zunimmt. Die Kreise werden somit imaginär. Ist schliesslich x = a, so ist $r = \frac{b^2 i}{c}$ imaginär und $p = \frac{a^3}{b^2}$.

Das System der die Ellipse $\mathfrak{E}$, und zwar von innen, doppelt berührenden Kreise K, deren Mittelpunkte D auf der Hauptachse liegen, zerfällt demnach in zwei Gruppen, nämlich in Kreise, deren Radius reell, und in solche, deren Radius imaginär ist. Beide Gruppen werden durch die Brennpunkte der $\mathfrak{E}$ getrennt, die als unendlich kleine Kreise K anzusehen sind. Unter den reellen doppelt berührenden Kreisen gibt es solche, die $\mathfrak{E}$ reell, und solche, die sie imaginär berühren. Da die Ellipse $\mathfrak{E}$ und jeder Kreis K im Berührungspunkt P dieselbe Tangente PT haben, so kann eine

reelle Berührung nur dann stattfinden, wenn sich von dem vierten harmonischen Punkt C zu D in Bezug auf F und F_1 eine reelle Tangente an den Kreis K legen lässt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn C ausserhalb des Kreises K liegt, also wenn $DC \geq r$ ist. Ist für einen Kreis K gerade $DC = r$, so berührt dieser Kreis K_0 die Ellipse $\mathfrak{E}$ in dem Punkte C, der dann einer der Hauptscheitel von $\mathfrak{E}$ ist; während für alle Kreise K, deren Radius r grösser als die entsprechende Strecke DC ist, eine imaginäre Berührung mit der Kurve erfolgt.

Da, wie schon gesagt wurde, für den Kreis K_0 der der grossen Achse angehörende Punkt $C = C_0$ Berührungspunkt von K_0 und $\mathfrak{E}$ ist, so muss C_0 mit dem Scheitel A der Ellipse identisch sein. Der Kreis K_0 ist also der die Ellipse in A vierpunktig berührende Kreis oder der Krümmungskreis der Ellipse im Scheitel A, r_0 demnach der Krümmungsradius. Es ist dann

$$r_0^2 = D_0A^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot FD_0 \cdot D_0F_1$$

oder

$$(a - x_0)^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x_0^2)$$

$$x_0^2 - \frac{2c^2}{a}x_0 + \frac{c^4}{a^2} = 0,$$

also

$$(x_0 - \frac{c^2}{a})^2 = 0,$$

somit

$$MD_0 = x_0 = \frac{c^2}{a}; \quad r_0 = a - x = \frac{b^2}{a}; \quad p_c = a.$$

Die Mittelpunkte der reellen und reell berührenden Kreise K erfüllen also die Strecke MD_0, die der reellen, aber imaginär berührenden Kreise die Strecke D_0F; die zwischen F und A liegenden Punkte der Achse sind Mittelpunkte imaginärer Kreise. Entsprechendes gilt natürlich für die Punkte, die in den Strecken MD'_0, D'_0F_1 und F_1A_1 liegen, wenn D'_0, F_1 und A_1 die in Bezug auf M zu D_0, F und A symmetrischen Punkte sind. (II., 404.)

Ist nun auf der Hauptachse AA_1 der Ellipse $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Punkt D als Mittelpunkt eines die Ellipse doppelt berührenden Kreises K gegeben, so ist, wenn $MD = x$ gesetzt wird, sein Radius r bestimmt durch die Gleichung

$$r^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2).$$

Da aber die Tangente PT und die Normale PN der Kurve im Berührungspunkt P mit den Brennstrahlen PF und PF_1 einen harmonischen Strahlenwurf, also die Schnittpunkte C, D, F, F_1 dieser Strahlen mit AA_1 einen harmonischen Punktwurf bilden, so ergibt sich die Berührungssehne PP von $\mathfrak{E}$ und K einfach dadurch, dass man von dem vierten harmonischen Punkt C zu D in Bezug auf F und F_1 an den Kreis K oder an die Ellipse die Tangenten legt.

Wie der Schnittpunkt D der Normale des Punktes P mit der Hauptachse von $\mathfrak{E}$ der Mittelpunkt eines die Ellipse doppelt berührenden Kreises K ist, so kann auch ihr Schnittpunkt N mit der Nebenachse als Zentrum eines derartigen Kreises angesehen werden, der mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden möge. Sein Radius r ist dann NP, und auch hier lässt sich ein ähnlicher Ausdruck für r^2 angeben. Zunächst ist unmittelbar

$$NP^2 = NQ \cdot NT = (NM + MQ)\,(NM + MT).$$

Nun war aber, wie oben gezeigt wurde,

$$MQ : NM = b^2 : c^2,$$

also

$$MQ = \frac{b^2}{c^2} \cdot NM,$$

wodurch die erste Beziehung die Form

$$NP^2 = NM \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot (NM + MT)$$ erhält.

Da nun

$$NM \cdot MT = MF^2 = c^2$$

oder

$$MT = \frac{c^2}{NM}$$ ist, so folgt

$$NP^2 = \frac{a^2}{c^2}(NM^2 + c^2).$$

Wird nun $MN = x$ gesetzt, so ergibt sich die der oben abgeleiteten durchaus analoge Beziehung

$$NP^2 = r^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + x^2),$$

die sich auch ähnlich in Worte fassen lässt. Es ist nämlich $x^2 + c^2 = (x - ci)(ci + x)$. Da nun ci und $-ci$ die Abstände der auf der kleinen Achse der Ellipse $\mathfrak{E}$ gelegenen imaginären Brennpunkte F' und F'_1 vom Mittelpunkt M der Kurve sind und x die Entfernung des Punktes N bezeichnet, also $x - ci = F'N$ und $-(ci + x) = NF'_1$ ist, so ist

$$NP^2 = r^2 = -\frac{a^2}{c^2} \cdot F'N \cdot NF'_1.$$

Somit gilt der

Satz: *Jeder auf der kleinen Achse einer Ellipse* $\mathfrak{E}$ *gelegene Punkt* N *ist Mittelpunkt eines die Kurve doppelt berührenden Kreises* $\mathfrak{K}$, *zwischen dessen Radius* r *und den Entfernungen seines Mittelpunktes* N *von den imaginären Brennpunkten* F' *und* F'_1 *der Ellipse stets die Beziehung besteht*

$$r^2 = -\frac{a^2}{c^2} \cdot F'N \cdot NF'_1,$$

worin 2a *und* 2c *die Längen der grossen Achse und der Brennweite sind.*

Um einen einfachen Ausdruck für den Abstand MQ der Berührungssehne des Kreises $\mathfrak{K}$ und der Ellipse $\mathfrak{E}$ zu erhalten, geht man von der oben abgeleiteten Gleichung

$$NQ : NM = a^2 : c^2$$

aus, aus der sich sofort ergibt

$$NQ - NM : NM = a^2 - c^2 : c^2$$

oder

$$MQ : NM = b^2 : c^2.$$

Nun ist aber $MN = x$; wenn man daher $MQ = p$ setzt, so ist die gewünschte Beziehung $\frac{p}{-x} = \frac{b^2}{c^2}$,

also

$$p = -\frac{b^2}{c^2} x.$$

Damit kann man wieder leicht das ganze System der Kreise $\mathfrak{K}$ untersuchen, welche die Ellipse doppelt berühren und deren gemeinsame Zentrale die kleine Achse von $\mathfrak{E}$ ist. Für $x = 0$ ist $r = a$ und $p = 0$. Der Radius des die Ellipse doppelt berührenden Kreises $\mathfrak{K}$, dessen Mittelpunkt in den Mittelpunkt M der Ellipse fällt, ist somit gleich der Hälfte der grossen Achse, deren Endpunkte A, A_1 die Berührungspunkte sind. Der Kreis M ist der kleinste der Kreise des Systems $\mathfrak{K}$; denn wird x grösser, so wächst auch r und sodann auch — p. Die Kreise $\mathfrak{K}$ werden also grösser, je mehr ihre Mittelpunkte N sich von M entfernen. Ist $x = c$, so ist $r = a\sqrt{2}$ und $p = -\frac{b^2}{c}$. Wächst x noch mehr, so nehmen auch r und — p weiter zu. So ist für $x = b$ der Radius $r = \frac{a^2}{c}$ und $p = -\frac{b^3}{c^2}$. Bei allen Kreisen $\mathfrak{K}$ findet hierbei noch eine reelle Berührung statt, und zwar so lange, als sich von dem vierten harmonischen Punkt T zu N in Bezug auf F' und F'_1 an den Kreis $\mathfrak{K}$ eine reelle Tangente legen lässt, so lange also $PN > r$ ist. Wird für den Kreis $\mathfrak{K}_0$ grade $T_0N_0 = r_0$, so ist $\mathfrak{K}_0$ der die Ellipse $\mathfrak{E}$ im Nebenscheitel B vierpunktig berührende Kreis oder der Krümmungskreis. Es ist also T_0 mit B identisch und r_0 der Krümmungsradius. Da alsdann $r_0 = BN_0 = BM + MN_0 = b + x_0$ ist,

so gilt $$(x_0 + b)^2 = \frac{a^2}{c^2}(x_0^2 + c^2),$$

$$x_0^2 = \frac{2c^2}{b} x_0 + \frac{c^4}{b^2} = 0,$$

also $$x_0 = \frac{c^2}{b}; \qquad r_0 = \frac{a^2}{b}; \qquad p_0 = -b.$$

Wächst x noch weiter, so bleiben die immer wachsenden Kreise $\mathfrak{K}$ zwar reell, aber sie berühren die Ellipse $\mathfrak{E}$ imaginär, da der Abstand p ihrer Berührungssehne mit $\mathfrak{E}$ seinem absoluten Betrage nach grässer als die Länge der halben kleinen Achse ist. — Gibt man x den Wert $x = ci$, so wird

$r = 0$ und $p = -\frac{b^2 i}{c}$. Ganz entsprechend zu den für die Kreise K gefundenen Ergebnissen ist somit der Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Mittelpunkt den imaginären Abstand $\pm ci$ von M hat, dessen Mittelpunkt daher einer der beiden imaginären Brennpunkte F′ oder F'_1 ist, unendlich klein und berührt die Ellipse $\mathfrak{E}$ imaginär in seinen imaginären Schnittpunkten mit der zu dem Brennpunkt gehörigen ebenfalls imaginären Leitlinie.

Die Kreise $\mathfrak{K}$, deren Mittelpunkte N auf der kleinen Achse der Ellipse $\mathfrak{E}$ liegen, berühren also die Kurve von aussen doppelt und sind sämtlich reell. Die Berührung mit $\mathfrak{E}$ erfolgt reell bis zu den Krümmungskreisen in den Scheiteln der kleinen Achse mit den Mittelpunkten N_0, N'_0. Von da ab findet imaginäre Berührung statt. (II., 404).

Auch hier ist für jeden Punkt N der kleinen Achse der Kreis $\mathfrak{K}$ bestimmt, dessen Mittelpunkt N ist und der die Ellipse $\mathfrak{E}$ doppelt berührt. Sein Radius r ist gegeben durch

$$r^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + x^2),$$

wobei x den Abstand des Punktes N vom Mittelpunkt M der $\mathfrak{E}$ bezeichnet, und die Berührungssehne von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$ wird erhalten als Berührungssehne der Tangenten, die man von dem vierten harmonischen Punkt T zu N in Bezug auf F′ und F'_1 an $\mathfrak{K}$ legt.

Entsprechende Untersuchungen lassen sich nun auch für die Hyperbel anstellen. Deshalb dürfte hier ein schnelleres Vorwärtsgehen angebracht sein. Es sei eine Hyperbel $\mathfrak{H}$ gegeben, für die 2a, 2bi und $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ die Längen der Hauptachse, Nebenachse und Brennweite sein mögen. Man legt alsdann durch einen beliebigen Punkt P der Kurve und die beiden Brennpunkte F und F_1 den Kreis, nach dessen Schnittpunkten T und N mit der Nebenachse die

Tangente PT und die Normale PN der Hyperbel im Punkte P laufen. Ist ferner D der Schnittpunkt der Normale PN mit der Achse AA_1, so gilt

$$FD \cdot DF_1 = ND \cdot DP.$$

Fällt man nun von dem Brennpunkt F auf die Tangente PT das Lot FG, so gehört bekanntlich sein Fusspunkt G dem Kreise an, dessen Durchmesser die Achse AA_1 ist. Es ist also $MG = a$, und da nach einem bekannten Satz MG und PF_1 parallel sind, so ist

Winkel $FPN = DPF_1 = FGM$ und Winkel $PNF = PF_1D = GMF$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke NFP und MFG folgt dann

$$NF : NP = MF : MG = c : a.$$

Ferner ist $NF^2 = NM \cdot NT$ und $NP^2 = NQ \cdot NT$,

also $NF^2 : NP^2 = NM : NQ = c^2 : a^2$

und $NM : NM - NQ = c^2 : c^2 - a^2$,

daher $NM : QM = c^2 : b^2$.

Nun ist aber $NM : QM = ND : PD = c^2 : b^2$,

somit $$ND = \frac{c^2}{b^2} \cdot PD.$$

Mit diesem Wert von ND lautet die zuerst aufgestellte Gleichung

$$FD \cdot DF_1 = \frac{c^2}{b^2} \cdot DP \cdot PD$$

oder $$DP^2 = -\frac{b^2}{c^2} \cdot FD \cdot DF_1.$$

Der Punkt D ist nun Mittelpunkt eines die Hyperbel $\mathfrak{H}$ doppelt berührenden Kreises K, dessen Radius $r = DP$ ist. Also gilt der

Satz: *Jeder auf der Hauptachse einer Hyperbel $\mathfrak{H}$ gelegene Punkt* D *ist Mittelpunkt eines die Kurve doppelt berührenden Kreises* K, *zwischen dessen Radius* r *und den Abständen seines Mittelpunktes von den Brennpunkten die Beziehung*

$$r^2 = -\frac{b^2}{c^2} \cdot FD \cdot DF_1$$

besteht, in der $-b^2$ und c^2 die Quadrate der halben Nebenachse und der Brennweite bezeichnen.

Wird $MD = x$ gesetzt, so ist $FD = c + x$ und $DF_1 = c - x$, also

$$r^2 = -\frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2).$$

Da wie oben gezeigt

$$NM : NQ = c^2 : a^2$$

und nun $NM : NQ = MD : QP$ ist,

so ist $MD : QP = c^2 : a.^2$

Der Abstand p der Berührungssehne ist somit

$$p = QP = \frac{a^2}{c^2} MD = \frac{a^2}{c^2} \cdot x.$$

Gibt man auch hier, um die Beschaffenheit der Kreise K dieses Systems zu ermitteln, der Grösse x bestimmte Werte, so ist für

$x = a$ $\quad r = \frac{b^2 i}{c}$ $\quad p = \frac{a^3}{c^2}$;

$x = c$ $\quad r = 0$ $\quad p = \frac{a^2}{c}$;

$x_0 = \frac{c^2}{a}$ $\quad r_0 = \frac{b^2}{a}$ $\quad p_0 = a.$

Das System der die Hyperbel $\mathfrak{H}$ doppelt berührenden Kreise K, deren Mittelpunkte der Hauptachse angehören, berührt die Kurve von innen, und zwar gehören die Berührungspunkte eines jeden Kreises K stets demselben Hyperbelzweige an. Das System K zerfällt in zwei Gruppen, in reelle und imaginäre Kreise. Die Mittelpunkte D der imaginären Kreise erfüllen die von dem Scheitel A und dem Brennpunkt F begrenzte Strecke AF. Bei dem Brennpunkt F beginnen mit dem kleinsten Kreise, dessen Radius $r = 0$ und dessen Berührungssehne die zugehörige Leitlinie ist, die reellen Kreise. Diese Kreise, die zunächst noch die $\mathfrak{H}$ imaginär

berühren, werden um so grösser, je weiter sich ihr Mittelpunkt D vom Mittelpunkt M der Hyperbel entfernt. Fällt der Mittelpunkt des Kreises K in den Mittelpunkt D_0 des zum Hauptscheitel A gehörigen Krümmungskreises, so berührt dieser Kreis K_0 die $\mathfrak{H}$ im Scheitel A, also zum ersten Male reell. Von da ab wachsen die reell bleibenden Kreise beständig und haben mit der Hyperbel reelle Berührung. Dasselbe gilt auch von den Mittelpunkten D der Kreise K, welche in den Strecken liegen, die von den in Bezug auf M symmetrischen Punkten A_1, F_1 und D'_0 begrenzt werden. (II., 405).

Auch bei der Hyperbel kann noch ein zweiter Punkt der Normale der Kurve im Punkte P als Mittelpunkt eines die Hyperbel doppelt berührenden Kreises $\mathfrak{K}$ angesehen werden, ihr Schnittpunkt N mit der Nebenachse. Der Radius dieses Kreises, dessen Mittelpunkt also der Nebenachse angehört, ist $r = NP$. Dann ist leicht einzusehen, dass

$$NP^2 = NQ \cdot NT = (NM - QM)\,(NM + MT)$$

ist. Nun ist aber, wie oben gezeigt wurde,

$$NM : QM = c^2 : b^2$$

oder

$$QM = \frac{b^2}{c^2} \cdot NM.$$

Damit wird

$$NP^2 = \frac{a^2}{c^2} \cdot NM\,(NM + MT),$$

und da ferner

$$NM \cdot MT = c^2,$$

also

$$MT = \frac{c^2}{NM}$$

ist, so folgt

$$NP^2 = \frac{a^2}{c^2} \cdot (NM^2 + c^2).$$

Ist nun $MN = x$, so erhält man die Beziehung

$$NP^2 = r^2 = \frac{a^2}{c^2}\,(x^2 + c^2),$$

die sich durch Einführung der imaginären Brennpunkte F′ und F'_1 ähnlich wie die bei der Ellipse gefundene wiedergeben lässt. Da x — ci und — (ci + x) die Abstände des Punktes N von den imaginären Brennpunkten F′ und F'_1 sind, so ist

$$NP^2 = -\frac{a^2}{c^2} \cdot F'N \cdot NF'_1.$$

Satz: *Jeder auf der Nebenachse einer Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *liegende Punkt* N *ist Mittelpunkt eines die Hyperbel doppelt berührenden Kreises, zwischen dessen Radius und den Entfernungen seines Mittelpunktes von den imaginären Brennpunkten die Beziehung*

$$NP^2 = -\frac{a^2}{c^2} \cdot F'N \cdot NF'_1$$

besteht, wenn 2a *und* 2c *die Längen der Hauptachse und der Excentricität der Hyperbel sind.*

Für den Abstand p = MQ der Berührungssehne des Kreises $\mathfrak{K}$ und der Hyperbel $\mathfrak{H}$ gilt, wie schon nachgewiesen wurde,

$$MN : MQ = c^2 : b^2.$$

Daher ist, wenn MN = x eingesetzt wird,

$$p = MQ = \frac{b^2}{c^2} x.$$

Für	$x = 0$	ist	$r = a$	und	$p = 0$;
	$x = ci$		$r = 0$		$p = \frac{b^2 i}{c}$;
	$x_0 = \frac{c^2 i}{b}$		$r_0 = \frac{a^2 i}{b}$		$p_0 = bi$.

Der die Hyperbel $\mathfrak{H}$ doppelt berührende Kreis $\mathfrak{K}$, der mit $\mathfrak{H}$ konzentrisch ist, berührt also die Hyperbel in den Scheiteln der Hauptachse. Wächst x, wobei x nur reelle Werte annimmt, so werden auch die Kreise grösser. Alle diese Kreise sind reell und berühren die $\mathfrak{H}$ reell. Die Berührungspunkte gehören dabei beiden Zweigen der Hyperbel

an. Für imaginäre Werte von x werden die Kreise $\mathfrak{K}$ imaginär. Den Uebergang zwischen reellen und imaginären Kreisen vermitteln wieder die imaginären Brennpunkte. Sie sind als Kreise $\mathfrak{K}$ von unendlich kleinem Radius $r = 0$ aufzufassen und ihre Berührungssehnen mit $\mathfrak{H}$ sind die zu den imaginären Brennpunkten gehörigen imaginären Leitlinien. Auch die Krümmungskreise $\mathfrak{K}_0$ in den imaginären Scheiteln der Nebenachse sind imaginär. (II., 405).

Wie bei der Ellipse, so lässt sich auch bei der Hyperbel für jeden Punkt der einen und der andern Achse der Radius des zugehörigen die Kurve doppelt berührenden Kreises und seine Berührungssehne mit $\mathfrak{H}$ ermitteln. Liegt D auf der Haupt- und N auf der Nebenachse der Hyperbel, so gilt für den Radius

des Kreises K $\qquad r^2 = -\frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2)$

und den des Kreises $\mathfrak{K}$ $\quad r^2 = \frac{a^2}{c^2}(x^2 + c^2)$,

wobei a^2, $-b^2$ und c^2 die Quadrate der halben Längen der Achsen und der Excentricität sind. In jedem der beiden Fälle ergibt sich die Berührungssehne des Kreises und der Hyperbel dadurch, dass man von dem vierten harmonischen Punkt zu D oder N in Bezug auf die beiden reellen oder imaginären Brennpunkte an den Kreis die Tangenten legt.

Fasst man die eben für Ellipse und Hyperbel einzeln gewonnenen Ergebnisse zusammen, so kommt man zu folgenden für jeden Mittelpunktskegelschnitt geltenden Sätzen.

Für jeden Mittelpunktskegelschnitt K *gibt es zwei Systeme von Kreisen, die ihn doppelt berühren und deren Mittelpunkte auf der einen und der andern seiner Achsen liegen. Gehört der Mittelpunkt* X *eines der Kreise der Achse an, welche die reellen Brennpunkte trägt, so berührt der Kreis den Kegelschnitt von innen; liegt* X *aber auf der andern Achse, so findet die Be-*

rührung von aussen statt. Ist allgemein X *ein Punkt der den Mittelpunktskegelschnitt* K *reell oder imaginär schneidenden Achse* $AA_1 = 2a$, *so besteht zwischen dem Radius des dadurch bestimmten den* K *doppelt berührenden Kreises und den Entfernungen seines Mittelpunkts* X *von den reellen oder imaginären Brennpunkten* F *und* F_1 *der Achse* AA_1 *stets die Beziehung*

$$r^2 = q \cdot FX \cdot XF_1,$$

worin q *das Verhältnis der Quadrate der halben andern reellen oder imaginären Achse* $BB_1 = 2b$ *und der halben Excentricität* $FF_1 = 2c$ *oder* $FF_1 = 2ci$ *ist.*

Aehnliche Betrachtungen sollen nun endlich auch für die Parabel durchgeführt werden. Es sei P ein Punkt einer Parabel $\mathfrak{P}$, deren Brennpunkt F und deren Leitlinie l sein möge. Der Halbierungspunkt A des von F auf l gefällten Lotes FL ist dann der Scheitel der Parabel. Ist ferner PQ senkrecht zu AF und TA = AQ, so ist TP die Tangente und die auf TP in P errichtete Senkrechte PN die Normale der Parabel in P. Dann ist im rechtwinkligen Dreieck TPN

$$NP^2 = TN \cdot QN$$

und

$$TN = 2FN.$$

Da ferner QN als Subnormale gleich dem Abstand LF des Punktes F von der Leitlinie l ist, so ist

$$NP^2 = 2FN \cdot LF.$$

Aber N ist als Punkt der Normale PN Mittelpunkt eines die Parabel doppelt berührenden Kreises, da N zugleich der Parabelachse angehört. Somit gilt der

Satz: *Jeder auf der Achse einer Parabel* $\mathfrak{P}$ *liegende Punkt* N *ist Mittelpunkt eines die Kurve doppelt berührenden Kreises* K, *dessen Radius mittlere Proportionale zwischen dem doppelten Abstand des Punktes* N *von dem Brennpunkt und dem konstanten Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie ist.*

Setzt man $FN = x$ und ist 2π der Parameter der Parabel, so ist

$$LF = QN = \pi,$$

also $$NP^2 = r^2 = 2\pi x.$$

Für die Berührungssehne $p = FQ$ des Kreises mit $\mathfrak{P}$ gilt

$$p = x - \pi.$$

Um die Kreise K näher zu untersuchen, setzt man zunächst $x = -\frac{\pi}{2}$, dann ist $r = \pi i$ und $p = -\frac{3\pi}{2}$. Das System der Kreise K beginnt also mit imaginären Kreisen. Für $x = 0$ ist $r = 0$ und $p = -\pi$. Der erste der reellen Kreise K ist daher der als unendlich kleiner Kreis anzusehende Brennpunkt F, dessen Berührungssehne mit der Parabel die Leitlinie ist. Wächst x weiter, so berühren die reell bleibenden Kreise zunächst noch imaginär. Wird aber $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $r = \pi$ und $p = -\frac{\pi}{2}$. Der die Parabel vierpunktig berührende oder der Krümmungskreis der Parabel im Scheitel A ist daher der Kreis K, dessen Berührung zum ersten Male reell erfolgt. Erhält x noch grössere Werte, so wachsen die Kreise beständig bei reeller Berührung. Alle diese Kreise berühren die Parabel von innen. (II., 405.)

Für jeden auf der Achse liegenden Punkt N erhält man den Radius des die Parabel berührenden Kreises, dessen Mittelpunkt N ist, aus der Gleichung $r^2 = 2\pi x$, worin 2π den Parameter von $\mathfrak{P}$ und x die Entfernung des Punktes N vom Brennpunkt der Parabel bezeichnet. Die Berührungssehne des Kreises K und der Parabel ergibt sich als Berührungssehne der Tangenten, die man von dem zu N in Bezug auf den Brennpunkt F symmetrischen Punkt T an den Kreis K legt.

Da die zweite Achse der Parabel unendlich fern ist, so zerfallen die Kreise $\mathfrak{K}$, die die Parabel berühren und diese

Achse zur gemeinsamen Zentrale haben. Als die im endlichen Raume liegenden Teile dieses Systems doppelt berührender Kreise $\mathfrak{K}$ sind die Tangenten an die Parabel anzusehen und als ihre Mittelpunkte die unendlich fernen Punkte der zugehörigen Normalen. Der andre Teil jedes dieser Kreise wird durch die unendlich ferne Grade gegeben. (II., 405).

Die Systeme der Kegelschnitte K_1, die einen Kegelschnitt K in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers doppelt berühren.

Nach diesen Untersuchungen über die Systeme von Kreisen, die eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel doppelt berühren, soll nun wieder zu einem Mittelpunktskegelschnitt K zurückgekehrt werden. Es sei $AA_1 = 2a$ die eine Achse dieses Kegelschnitts K, wobei es gleichgültig sein soll, ob AA_1 den Kegelschnitt reell oder imaginär schneidet. Ferner seien F und F_1 die auf AA_1 liegenden reellen oder imaginären Brennpunkte des K. Das System der den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise, deren Mittelpunkte sämtlich auf der Achse AA_1 liegen, sei D. Dann besteht, wie oben genauer ausgeführt wurde, zwischen dem Radius r jedes dieser Kreise D und den Abständen FD und DF_1 seines Mittelpunktes D von den reellen oder imaginären Brennpunkten F und F_1 die Beziehung

$$r^2 = q \cdot FD \cdot DF_1,$$

in der q eine Konstante bezeichnet; und zwar ist q stets gleich dem Verhältnis des Quadrates der reellen oder imaginären zweiten Achse $BB_1 = 2b$ des K zu dem Quadrat der Excentricität $FF_1 = 2c$ oder $FF_1 = 2ci$, je nachdem F und F_1 reell oder imaginär sind. Zieht man in jedem Kreise D den Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, der einer bestimmt gegebenen Richtung R angehört, so gilt, da $D\mathfrak{G}$ und $D\mathfrak{G}_1$ Radien der Kreise D sind,

$$D\mathfrak{G}^2 = D\mathfrak{G}_1^2 = q \cdot FD \cdot DF_1.$$

Führt man dann die Achse AA_1 und den der Richtung R parallelen Durchmesser GG_1 des Kegelschnitts K als die X- und Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems ein, dessen Anfangspunkt also der Mittelpunkt M von K ist, und setzt $FM = MF_1 = c$ oder ci, so besteht zwischen den Koordinaten $x = MD$ und $y = D\mathfrak{G}$ der Punkte $\mathfrak{G}$ eine einfache Beziehung. Da nämlich $FD = c + x$ und $DF_1 = c - x$ ist, so genügen die Durchmesserendpunkte $\mathfrak{G}$ mit ihren Koordinaten der Gleichung

$$y^2 = q \cdot (c^2 - x^2),$$

die einen Kegelschnitt K_1 darstellt. Diese Gleichung lässt sich leicht auf die Form bringen

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{qc^2} = 1,$$

die bekannte Gleichung eines Kegelschnitts, die auf den Mittelpunkt und zwei konjugierte Durchmesser bezogen ist. Die Längen dieser konjugierten Durchmesser sind 2c und $2c\sqrt{q}$. Da nun die auf dem ersten Durchmesser AA_1 liegenden Brennpunkte von M je den Abstand c haben, so läuft der Kegelschnitt K_1 durch F und F_1 hindurch. Ferner wurde gezeigt, dass $q = \frac{b^2}{c^2}$ ist, wenn 2b die Länge der andern reellen oder imaginären Achse BB_1 des K und 2c die Länge der Excentricität bezeichnet. Da mithin $qc^2 = b^2$ ist, so schneidet der Kegelschnitt K_1 auf dem zu FF_1 konjugierten, der Richtung R angehörenden Durchmesser die Strecke $GG_1 = 2b$ ab, so dass also $G_1M = MG = b$ ist. Die Längen der auf den Achsen liegenden konjugierten Durchmesser des K_1 sind demnach $FF_1 = 2c$ und $GG_1 = 2b$. Sind nun F und F_1 reell oder imaginär, so schneidet auch der Durchmesser FF_1 den Kegelschnitt K_1 in reellen oder imaginären Punkten. Dasselbe gilt auch für den Durchmesser GG_1 des K_1, der mit den Nebenscheiteln B und B_1 reell oder imaginär ist.

Dass FF_1 und GG_1 konjugierte Durchmesser des K_1 sind, kann auch wie folgt einfach nachgewiesen werden. Die Sehnen $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ des K_1 sind ursprünglich Durchmesser der Kreise D. Da nun, wie sich oben ergab, die Kreise D, deren Mittelpunkte die Brennpunkte F und F_1 des K sind, sich auf ihre Mittelpunkte reduzieren, so müssen auch ihre nach der Richtung R parallel gezogenen Durchmesser $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ unendlich klein sein. Somit muss der Kegelschnitt K_1 als Ort der Endpunkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ durch die Brennpunkte F und F_1 hindurchgehen. Die Grade FF_1 nimmt nun aber die Mitten D der der Richtung R angehörenden Sehnen $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ des K_1 in sich auf; mithin muss FF_1 ein Durchmesser von K_1 sein. Der Halbierungspunkt M von FF_1 ist also nicht nur Mittelpunkt von K, sondern auch von K_1. Beide Kurven sind konzentrisch. Die durch M zur Richtung R parallel gezogene Grade GG_1 ist dann der zu FF_1 konjugierte Durchmesser des K_1. Dieser Durchmesser ist nun aber gleichzeitig Durchmesser des Kreises K, der M zum Mittelpunkt hat und durch die beiden andern reellen oder imaginären Scheitel B und B_1 von K hindurchgeht. Er ist also gleich $BB_1 = 2b$. Damit sind von neuem die Längen der als konjugiert erkannten Durchmesser $FF_1 = 2c$ und $GG_1 = 2b$.

Für jeden Mittelpunktskegelschnitt ist bekanntlich die Summe der Quadrate je zweier konjugierten Durchmesser konstant. Also gilt, wenn die Längen der konjugierten Durchmesser FF_1 und GG_1 des K_1 mit $2f$ und $2g$ bezeichnet werden,

$$f^2 + g^2 = \text{const.}$$

Nun ist aber, wie eben bewiesen wurde, $f = c$ und $g = b$, und da im Kegelschnitt K bekanntlich

$$a^2 - b^2 = c^2 \qquad \text{ist,}$$

so gilt

$$f^2 + g^2 = a^2.$$

Satz: *Zieht man daher in einem System von Kreisen* D, *die einen centrischen Kegelschnitt* K *doppelt berühren, nach einer beliebigen Richtung* R *parallele Durchmesser* $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$, *so liegen deren Endpunkte* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{S}_1$ *in einem andern*

Kegelschnitt K_1, *der die Verbindungsstrecke* FF_1 *der Brennpunkte* F *und* F_1 *des* K *auf derjenigen seiner Achsen, auf der die Mittelpunkte der Kreise* D *liegen, zum Durchmesser hat, dessen Endpunkte mit* F *und* F_1 *zugleich reell oder imaginär sind. Der dem Durchmesser* FF_1 *konjugierte Durchmesser* GG_1 *in* K_1 *ist der Richtung* R *parallel und gleich der andern Achse* $BB_1 = 2b$ *des* K, *mit der er gleichzeitig reell oder imaginär ist. Ferner ist die Summe der Quadrate dieser und daher auch die Summe der Quadrate zweier beliebigen konjugierten Durchmesser des* K_1 *gleich dem Quadrat der Achse* $AA_1 = 2a$ *des* K *(II., 401, 407).*

Nun kann aber auch das System der Kreise D definiert werden, ohne dass es mit dem Kegelschnitt K in Verbindung gebracht wird. Da nämlich jeder Kreis D mit seinem Radius r und den Abständen seines Mittelpunktes D von den beiden Brennpunkten F und F_1 des K der Gleichung

$$r^2 = q \cdot FD \cdot DF_1$$

genügt, so besteht das System aus sämtlichen Kreisen mit gemeinsamer Zentrale, die die Eigenschaft haben, dass das Quadrat ihres Radius zu dem Rechteck aus den Entfernungen ihres Mittelpunktes von zwei festen Punkten F und F_1 der Zentrale in einem konstanten Verhältnis q steht. Daher kann man die gewonnenen Ergebnisse auch folgendermassen wiedergeben.

Satz: *Werden in sämtlichen Kreisen* D, *die dadurch definiert sind, dass das Verhältnis des Quadrates des Radius eines jeden der Kreise zum Rechteck aus den Abständen seines Mittelpunktes von zwei festen Punkten* F *und* F_1 *der gemeinsamen Zentrale aller Kreise einen konstanten Wert hat, die einer bestimmten Richtung R angehörenden Durchmesser* $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ *gezogen, so ist der Ort ihrer Endpunkte* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *ein Kegelschnitt* K_1. *Die Strecke* $FF_1 = 2f$ *und der zur Richtung* R *parallele Durchmesser* $GG_1 = 2g$ *des Kreises* D, *dessen Mittelpunkt der Halbierungspunkt* M *der Strecke* FF_1 *ist, sind ihrer*

Richtung und Länge nach zwei konjugierte Durchmesser des K_1. *Daher ist die Summe der Quadrate der Achsenlängen des* K_1 *gleich der Summe*

$$4f^2 + 4g^2.$$

Um für einen beliebigen auf der Achse AA_1 eines Kegelschnitts K gelegenen Punkt D die Berührungssehne PP_1 des durch ihn bestimmten den K doppelt berührenden Kreises D mit K zu erhalten, musste man den vierten harmonischen Punkt C zu D in Bezug auf die beiden Brennpunkte F und F_1 der Achse AA_1 konstruieren und aus C an den Kreis D die Tangenten CP und CP_1 legen. Die Verbindungslinie PP_1 der Berührungspunkte war dann die gesuchte Berührungssehne. Zeichnet man nun an den Kegelschnitt K_1 in einem seiner Punkte $\mathfrak{G}$ die Tangente, so trifft sie den Durchmesser FF_1 in dem Pole der zu R parallelen Sehne $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, also in einem Punkte, der mit D und F und F_1 eine harmonische Gruppe bildet, somit in dem oben genannten Punkt C. Die an den Kegelschnitt K_1 in einem seiner Punkte $\mathfrak{G}$ gelegte Tangente trifft also die Achse AA_1 in demselben Punkt C, aus welchem die an den Kreis D gelegten Tangenten die verlangte Berührungssehne des Kreises D mit K ergaben. Daher gilt der

Satz: *Sind* P *und* P_1 *die beiden Punkte, in denen ein beliebiger Kreis* D *den* K *berührt, und schneidet der Kreis* D *den* K_1 *in den Endpunkten* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *seines zur Richtung* R *gehörenden Durchmessers, so treffen sich die in* P *und* P_1 *an* K *und die in* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *an* K_1 *gelegten Tangenten in demselben Punkt* C *der Achse* AA_1. *(II., 401).*

Für jeden der Kreise D ist, wie oben gezeigt wurde, der von seinem Mittelpunkt D nach seinem Berührungspunkt P mit dem Mittelpunktskegelschnitt K gezogene Radius DP die Normale beider Kurven. Nun lassen sich bekanntlich an jeden centrischen Kegelschnitt K stets nur zwei Tangenten ziehen, die einer bestimmten Richtung angehören; daher gibt es auch nur zwei Normalen des K, die diese Eigenschaft

besitzen[1]). Mithin kann nur zweimal der Fall eintreten, dass für einen Kreis D der zur Richtung R parallele Durchmesser Normale des K ist. Da dann der auf K liegende Fusspunkt H der Normale als Endpunkt des Kreisdurchmessers mit einem Punkte von K_1 zusammenfällt, so haben K und K_1 den Punkt H gemein. Nun schneiden sich aber nach dem oben bewiesenen Satze die Tangenten an K und K_1 in zwei solchen Punkten P und Ⓢ, die demselben Kreise D angehören und von denen der eine, P, der Berührungspunkt von D und K und der andre, Ⓢ, Endpunkt des der Richtung R angehörenden Durchmessers von D ist, in demselben Punkte von AA_1. Mithin fallen in dem den beiden Kegelschnitten K und K_1 gemeinsamen Punkte H die Tangenten an K und K_1 zusammen. Die beiden Kurven berühren sich somit in H. Dasselbe gilt für einen Punkt H_1, dem die zweite der Richtung R angehörende Normale des K zukommt. Da nun die Normalen in H und H_1 an beide Kegelschnitte parallel sind, so gilt dies auch für die darauf senkrechten Tangenten. Aber zwei Punkte eines Kegelschnitts, die parallele Tangenten haben, sind die Endpunkte eines seiner Durchmesser. Somit berühren sich K und K_1 in den Endpunkten H und H_1 eines ihnen gemeinsamen Durchmessers $HH_1 = 2h$, der bei einer Ellipse K stets reell ist, bei einer Hyperbel K aber auch imaginär sein kann. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind nun dem konjugierten Durchmesser parallel. Da nun K und K_1 in ihren Berührungspunkten H und H_1 gemeinsame Tangenten besitzen, so fallen die dem Durchmesser HH_1 in K und K_1 konjugierten Durchmesser LL und L_1L_1 aufeinander. Sind nun die Längen $LL = 2l$ und $L_1L_1 = 2l_1$, so gilt nach einem bekannten, schon oben angewendeten Satze

im Kegelschnitt K_1 $\quad h^2 + l_1^2 = f^2 + g^2 = a^2$

und in K $\quad h^2 + l^2 = \quad = a^2 + b^2.$

Daraus ergibt sich $\quad l^2 - l_1^2 = b^2.$

---

[1]) Nicht im Widerspruch damit, dass durch einen Punkt vier Normalen gehen, weil hier die beiden andern Normalen mit der unendlich fernen Graden zusammenfallen.

Somit gilt der

Satz: *Der Kegelschnitt* K_1 *berührt den gegebenen Kegelschnitt* K *in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers* HH_1, *zwischen dessen in* K *und* K_1 *konjugierten Durchmessern* $LL = 2l$ *und* $L_1L_1 = 2l_1$ *die Beziehung*

$$l^2 - l_1^2 = b^2$$

besteht. (II., 407).

Da der in jedem den Kegelschnitt K doppelt berührenden Kreise D nach dem Berührungspunkt P gezogene Radius DP zugleich die Normale des K in seinem Punkte P ist, so können die eben gefundenen Ergebnisse auch wie folgt zusammengefasst werden.

Satz: *Zieht man die Normalen eines Kegelschnitts* K *bis an eine seiner Achsen* AA_1 *und bewegt man sie um die Punkte, in denen sie die Achse treffen, so herum, bis sie dieselbe gegebene Richtung haben, so liegen ihre Endpunkte stets in einem andern Kegelschnitt* K_1, *der den Kegelschnitt* K *in den Endpunkten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers* HH_1 *berührt und der den Abstand* FF_1 *der in der Achse* AA_1 *liegenden Brennpunkte des* K *zum Durchmesser hat. Der diesem Durchmesser in* K_1 *konjugierte Durchmesser* GG_1 *ist der Richtung* R *parallel, und zwischen den dem gemeinsamen Durchmesser* HH_1 *in* K *und* K_1 *konjugierten Durchmessern* $LL = 2l$ *und* $L_1L_1 = 2l_1$ *gilt die Beziehung*

$$l^2 - l_1^2 = b^2,$$

wobei 2b *gleich der Länge der andern Achse* BB_1 *des* K *ist. (II., 408.)*

Hierbei ist indessen wohl zu beachten, dass sich aus den Normalen des Kegelschnitts K nicht das ganze System der den K doppelt berührenden Kreise D ergibt. Da nämlich die Fusspunkte der Normalen des Kegelschnitts K die Berührungspunkte des K mit den reellen Kreisen D sind, deren Berührung reell stattfindet, so gehen aus den Normalen des K allein die Kreise D des Systems hervor, die reell sind und den K reell doppelt berühren.

Der zu dem Scheitel A des Kegelschnitts K gehörige Krümmungskreis, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ ist, ist der Kreis des Systems D, dessen Berührungspunkte P und P_1 mit K in den Scheitel A, also in einen Punkt der Achse AA_1 des K fallen. Also müssen die in den Endpunkten $\mathfrak{G}^0, \mathfrak{G}^0_1$ des der Richtung R angehörenden Durchmessers $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ dieses Kreises an K_1 gelegten Tangenten durch A hindurchgehen. Der Radius $\mathfrak{A}\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{A}\mathfrak{G}^0_1$ ist aber, wie schon oben erkannt wurde, gleich dem Abstand $\mathfrak{A}A$ seines Mittelpunkts $\mathfrak{A}$ vom Scheitel A. Damit sind die beiden Dreiecke $A\mathfrak{A}\mathfrak{G}^0$ und $A\mathfrak{A}\mathfrak{G}^0_1$ gleichschenklig. Für die besonderen Kreise des Systems D, nämlich für die zu den Scheiteln A und A_1 gehörigen Krümmungskreise $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ bilden daher die in den Endpunkten $\mathfrak{G}^0$ und $\mathfrak{G}^0_1$ der zur Richtung R parallelen Durchmesser an K_1 gelegten Tangenten mit der Richtung R und der Achse AA_1 gleiche Winkel. Für die reellen, aber imaginär berührenden Kreise ist, wie oben nachgewiesen wurde, falls T der vierte harmonische Punkt zu D in Bezug auf F und F_1 ist, $TD \lessgtr D\mathfrak{G}$, während für die reell und reell berührenden Kreise $TD \gtrless D\mathfrak{G}$ ist. Da in dem ersten Falle auch Winkel $T\mathfrak{G}D < DT\mathfrak{G}$ und in dem zweiten Falle Winkel $T\mathfrak{G}D > DT\mathfrak{G}$ ist, so gilt: Je nachdem die in dem Endpunkt $\mathfrak{G}$ des zur Richtung R parallelen Durchmessers $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ eines Kreises D an diesen gelegte Tangente mit der Richtung R einen grösseren oder einen kleineren Winkel bildet als mit der Richtung der Achse AA_1, berührt der Kreis D den Kegelschnitt K reell oder imaginär. Ist im besonderen Falle die Richtung R die zu AA_1 senkrechte Richtung, so bildet die Tangente im Punkte $\mathfrak{G}$ an K_1 mit der Achse den Winkel $\frac{\pi}{4}$ oder einen kleineren oder einen grösseren Winkel, wenn der Kreis D, dessen Durchmesserendpunkt der Punkt $\mathfrak{G}$ ist, der Krümmungskreis $\mathfrak{A}$ im Scheitel A von K oder ein reeller oder ein imaginär doppelt berührender Kreis für K ist. (II., 401).

Da für die ausgezeichneten Kreise $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ des Systems D stets $\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{A}\mathfrak{G}^0_1$ ist, so ist Winkel $G^0AG^0_1 = \frac{\pi}{2}$.

Die in den Endpunkten $\mathfrak{G}^0$ und $\mathfrak{G}^0_1$ eines Krümmungskreises von K an K_1 gelegten Tangenten stehen somit aufeinander senkrecht. Ihr Schnittpunkt ist daher ein Punkt des Direktorkreises des Kegelschnittes K_1. (II., 401.)

Es soll nun für den Kegelschnitt K, der entweder Ellipse oder Hyperbel ist, die Art des Kegelschnittes K_1 ermittelt werden, und zwar in den beiden Fällen, wo die Mittelpunkte des Systems doppelt berührender Kreise der Haupt- und der Nebenachse angehören.

Der Kegelschnitt K sei zunächst eine Ellipse $\mathfrak{E}$, die Mittelpunkte der Kreise mögen die Hauptachse erfüllen. Dann sind die Brennpunkte F und F_1 reell, und es gilt für das System der Kreise die Beziehung

$$r^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2).$$

Damit lautet die Gleichung des Kegelschnitts K_1

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2),$$

deren auf zwei konjugierte Durchmesser bezogene Form

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erkennen lässt, dass der Kegelschnitt K_1 eine Ellipse $\mathfrak{E}_1$ ist.

Zieht man daher in allen eine Ellipse $\mathfrak{E}$ doppelt berührenden Kreisen, deren gemeinsame Zentrale die Hauptachse ist, die zu einer Richtung R parallelen Durchmesser, so liegen deren Endpunkte in einer zweiten Ellipse $\mathfrak{E}_1$, welche die Ellipse $\mathfrak{E}$ in den Endpunkten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers berührt und die durch die Brennpunkte der ersten hindurchgeht. Der dem Durchmesser FF_1 in $\mathfrak{E}_1$ konjugierte Durchmesser ist der Richtung R parallel und gleich der kleinen Achse $BB_1 = 2b$ von $\mathfrak{E}$. Die dem gemeinsamen Durchmesser in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ konjugierten Durchmesser $2l$ und $2l_1$ genügen der Gleichung

$$l^2 - l_1^2 = b^2.$$

Liegen nun aber die Mittelpunkte der doppelt berührenden Kreise auf der kleinen Achse BB_1 der Ellipse $\mathfrak{E}$, dann sind die dieser Achse angehörenden Brennpunkte imaginär. Da die Kreise in diesem Falle durch die Relation

$$r^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + x^2)$$

gegeben sind, so lautet die Gleichung von K_1

$$y^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + x^2)$$

oder

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

Hier ist also der Kegelschnitt K_1 eine Hyperbel $\mathfrak{H}_1$, deren auf BB_1 und GG_1 liegende konjugierte Durchmesser die Längen $2ci$ und $2a$ haben, also gleich den Abständen der hier imaginären Brennpunkte und der andern Scheitel A, A_1 sind. Auch dieser Kegelschnitt $\mathfrak{H}_1$ berührt $\mathfrak{E}$ in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers, für dessen in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}_1$ konjugierte Durchmesser $2l$ und $2l_1 i$ die Beziehung gilt

$$l^2 + l_1^2 = a^2.$$

Liegt daher eine Ellipse $\mathfrak{E}$ vor und zieht man in den beiden Systemen sie doppelt berührender Kreise nach derselben Richtung R die Durchmesser, so besteht der Ort ihrer Endpunkte aus einer Ellipse $\mathfrak{E}_1$ und einer Hyperbel $\mathfrak{H}_1$, welche die Ellipse $\mathfrak{E}$ und daher sich selbst in den Endpunkten eines allen drei Kurven gemeinsamen Durchmessers berühren. Dieser Durchmesser ist dadurch bestimmt, dass die Tangenten in seinen Endpunkten an eine der drei Kurven zu der Richtung R senkrecht sind. Haben die diesem Durchmesser in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Durchmesser die Längen $2l$, $2l_1$ und $2l_I$, so gilt, wenn $2a$ und $2b$ die Achsenlängen von $\mathfrak{E}$ sind,

$$l^2 - l_1^2 = b^2 \qquad \text{und} \qquad l^2 + l_I^2 = a^2,$$

woraus sich sofort ergibt, wenn $2c$ die Excentricität von $\mathfrak{E}$ bezeichnet,

$$l_1^2 + l_I^2 = c^2.$$

Ist nun im andern Falle der Mittelpunktskegelschnitt eine Hyperbel $\mathfrak{H}$, so ist, wie oben gezeigt wurde, die Gleichung

$$r^2 = \frac{-b^2}{c^2}(c^2 - x^2)$$

massgebend für die die Hyperbel doppelt berührenden Kreise, deren Mittelpunkte Punkte der Hauptachse $AA_1 = 2a$ sind. Somit lautet die Gleichung des Kegelschnitts K_1

$$y^2 = -\frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2).$$

Bringt man sie auf die Form

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so erkennt man sofort, dass sie eine Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ darstellt, die auf den konjugierten Durchmessern AA_1 und GG_1 die Längen $2c$ und $2bi$ abschneidet.

Für die Kreise dagegen, die die Hyperbel doppelt berühren und deren gemeinsame Zentrale die Nebenachse BB_1 der Hyperbel ist, gilt

$$r^2 = \frac{a^2}{c^2}(x^2 + c^2).$$

Hieraus ergibt sich sofort als Gleichung des Kegelschnitts K_1

$$y^2 = \frac{a^2}{c^2}(x^2 + c^2)$$

oder

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1,$$

die Gleichung einer Hyperbel $\mathfrak{H}_2$.

Zieht man also in den beiden Systemen der eine Hyperbel doppelt berührenden Kreise die beliebigen Richtungen parallelen Durchmesser, so erfüllen die Endpunkte, mögen die Mittelpunkte der Kreise Punkte der Haupt- oder Nebenachse sein, stets eine Hyperbel, die die Hyperbel $\mathfrak{H}$ in den Endpunkten eines beiden Kurven gemeinsamen Durchmessers berührt. Ist die Hauptachse $AA_1 = 2a$ die Zentrale der Kreise, so hat die entstehende Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ den Abstand FF_1 der

Brennpunkte F und F_1 von $\mathfrak{H}$ zum Durchmesser, während in dem Falle, wo die Mittelpunkte der Kreise auf der Nebenachse $BB_1 = 2bi$ liegen, die Hyperbel $\mathfrak{H}_2$ durch die imaginären Brennpunkte von $\mathfrak{H}$ hindurchläuft. Sind $2li$ und $2l_1i_1$ die dem gemeinsamen Durchmesser von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ — der hier als reell angenommen werden möge — in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Durchmesser, so ist

$$l^2 - l_1^2 = b^2;$$

und bezeichnen $2li'$ und $2l_1i'_1$ die Längen der Durchmesser in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_2$, die dem gemeinsamen Durchmesser von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_2$ konjugiert sind, so gilt

$$-l'^2 + l'_1{}^2 = a^2.$$

Werden nun die Durchmesser in beiden Systemen nach derselben Richtung gezogen, so berühren sich die drei Hyperbeln $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ in den Endpunkten eines allen drei Kurven gemeinsamen Durchmessers. Da dann $2l = 2l'$ ist, so besteht die Beziehung

$$l_1^2 - l_1^2 = c^2.$$

wenn $2c$ die Excentricität von $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

> *Somit ist der Kegelschnitt* K_1 *im allgemeinen mit* K *von gleicher Art, nur wenn* K *eine Ellipse ist und die Kreise die kleine Achse zur gemeinsamen Zentrale haben, ist* K_1 *andrer Art, nämlich eine Hyperbel. (II., 408.)*

Die Parabel erfordert, wie immer, auch hier eine besondre Behandlung, obwohl sie beinahe dieselben Ergebnisse und zwar auf einfachere Weise liefert, da bei der Parabel nur das eine der beiden Kreissysteme vorhanden ist.

Es sei AM die Achse und F der Brennpunkt der Parabel $\mathfrak{P}$. Die auf AM in A errichtete Senkrechte s ist dann die Scheiteltangente. Das allein existierende System von Kreisen, die $\mathfrak{P}$ doppelt berühren, hat dann die Achse AM zur gemeinsamen Zentrale. Ist N ein beliebiger Punkt von AM, so besteht, wie auf Seite 48 genauer gezeigt wurde,

zwischen dem Radius r des dadurch bestimmten die Parabel doppelt berührenden Kreises N, dem Parameter 2π der Parabel und der Entfernung $FN = x$ seines Mittelpunktes N von dem Brennpunkt F die Beziehung

$$r^2 = 2\pi x.$$

Werden nun in sämtlichen Kreisen N nach einer gegebenen Richtung R parallele Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ gezogen, so gilt für die Radien $N\mathfrak{G} = N\mathfrak{G}_1$ entsprechend

$$N\mathfrak{G}^2 = N\mathfrak{G}_1{}^2 = 2\pi x.$$

Führt man alsdann die Achse AM und die zur Richtung R durch F gezogene Parallele als X- und Y-Achse eines schiefwinkligen Systems ein, dessen Anfangspunkt also F ist, so sind $FN = x$ und $N\mathfrak{G} = y$ die Koordinaten jedes Durchmesserendpunktes $\mathfrak{G}$. Damit geht die obige Beziehung über in

$$y^2 = 2\pi x,$$

die die Gleichung des Ortes der Durchmesserendpunkte $\mathfrak{G}$ darstellt. Die Gleichung ist die auf einen Durchmesser und die Tangente in seinem Endpunkt bezogene Gleichung einer Parabel $\mathfrak{P}_1$. Mithin erfüllen die Punkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ eine Parabel, für die die Richtung AM und die Richtung R konjugierte Richtungen sind. Sie geht durch den Brennpunkt F von $\mathfrak{P}$.

Den Beweis hierfür kann man auch wie folgt führen. Den Uebergang zwischen den imaginären und den reellen Kreisen, welche die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berühren, vermittelt bekanntlich der Brennpunkt F, der als unendlich kleiner Kreis anzusehen ist. Da für diesen Kreis N die Endpunkte des der Richtung R angehörenden Durchmessers $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ mit F zusammenfallen, so muss der Ort der Durchmesserendpunkte, die Parabel $\mathfrak{P}_1$, durch F hindurchgehen. Nun nimmt aber die Achse AM als Zentrale der Kreise N die Mitten aller parallelen Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der $\mathfrak{P}_1$ auf; mithin ist FM ein Durchmesser der Parabel $\mathfrak{P}_1$, und die Richtung R ist die zu FM konjugierte Richtung. Demnach gilt der

Satz: *Zieht man in dem System von Kreisen* N, *die eine Parabel* $\mathfrak{P}$ *doppelt berühren, nach einer beliebigen Richtung* R *parallele Durchmesser* $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, *so liegen deren Endpunkte* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *in einer andern Parabel* $\mathfrak{P}_1$, *die durch den Brennpunkt* F *von* $\mathfrak{P}$ *hindurchgeht. Die Achse der Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *ist der Achse der Parabel* $\mathfrak{P}$ *parallel und die dieser Achse als Durchmesser von* $\mathfrak{P}_1$ *konjugierte Richtung ist die Richtung* R.

Um für einen auf der Achse der Parabel $\mathfrak{P}$ gelegenen Punkt N die Berührungssehne PP_1 des durch N bestimmten die Parabel doppelt berührenden Kreises N mit $\mathfrak{P}$ zu ermitteln, musste man NF über F hinaus um sich selbst bis T verlängern und von T aus die Tangenten an den Kreis N oder an $\mathfrak{P}$ ziehen. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte war dann die gesuchte Berührungssehne PP_1. Legt man nun an die Parabel $\mathfrak{P}_1$ in einem ihrer Punkte $\mathfrak{G}$ die Tangente, so schneidet sie den Durchmesser AM in dem Punkte, der der Pol der durch $\mathfrak{G}$ zur Richtung R parallel gezeichneten Sehne $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ ist. Dieser Punkt ist dann aber der vierte harmonische dem Schnittpunkt N von $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ mit AM zugeordnete Punkt in Bezug auf F und den zweiten unendlichen fernen Schnittpunkt F_1 von FN mit $\mathfrak{P}_1$, also der zu N in Bezug auf F symmetrische Punkt T. Die an die Parabel $\mathfrak{P}_1$ in einem ihrer Punkte $\mathfrak{G}$ gelegte Tangente schneidet somit die Achse AM der Parabel $\mathfrak{P}$ in demselben Punkte T, aus dem die an den Kreis N gelegten Tangenten die verlangte Berührungssehne des Kreises N mit $\mathfrak{P}$ ergaben.

Satz: *Sind* P *und* P_1 *die beiden Punkte, in denen ein beliebiger Kreis* N *die Parabel* $\mathfrak{P}$ *berührt, und schneidet der Kreis* N *die Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *in den Endpunkten* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *seines zur Richtung* R *gehörigen Durchmessers, so treffen sich die in* P *und* P_1 *an* $\mathfrak{P}$ *und die in* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *an* $\mathfrak{P}_1$ *gelegten Tangenten in demselben Punkt der Achse* AM *von* $\mathfrak{P}$.

Da sich an eine Parabel $\mathfrak{P}$ bekanntlich nur eine Tangente legen lässt, die einer bestimmten Richtung angehört, so gibt es auch nur eine Normale der Parabel mit dieser

Eigenschaft. Nun ist aber jede Normale der Parabel der nach dem Berührungspunkt mit ihr gezogene Radius eines sie doppelt berührenden Kreises. Mithin kann nur einmal der Fall eintreten, dass ein zur Richtung R paralleler Radius eines die Parabel doppelt berührenden Kreises zugleich Normale der Parabel $\mathfrak{P}$ ist. Der Endpunkt H dieses Radius liegt dann zunächst auf $\mathfrak{P}$ als Fusspunkt der Normale N P, dann aber auch auf $\mathfrak{P}_1$ als Endpunkt des zu R parallelen Durchmessers des Kreises N. Somit haben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ den Punkt H gemein. Nun schneiden sich aber nach dem eben bewiesenen Satz die Tangenten an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ in zwei solchen Punkten P und $\mathfrak{G}$, die demselben Kreise N angehören und von denen der eine, P, der Berührungspunkt von N mit $\mathfrak{P}$ und der andre, $\mathfrak{G}$, Endpunkt des der Richtung R angehörenden Durchmessers des Kreises N ist, in demselben Punkte von A M. Mithin fallen die in dem gemeinsamen Punkte H von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ gelegten Tangenten zusammen. Die beiden Parabeln $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ berühren sich demnach in H und dem unendlich fernen Punkte ihrer parallelen Achsen.

Da, wie eben nochmals erwähnt wurde, die nach den Berührungspunkten P und P_1 eines die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berührenden Kreises gezogenen Radien zugleich die Normalen von $\mathfrak{P}$ sind, so können die bisher gefundenen Ergebnisse auch wie folgt formuliert werden.

Satz: *Werden in allen Punkten einer Parabel* $\mathfrak{P}$ *die Normalen bis an die Achse gezogen und um die* Schnittpunkte *mit ihr so herum bewegt, bis sie irgend einer gegebenen Richtung parallel sind, so liegen ihre Endpunkte in einer zweiten Parabel* $\mathfrak{P}_1$, *die durch den Brennpunkt* F *der Parabel* $\mathfrak{P}$ *hindurchläuft. Die beiden Parabeln berühren sich und ihre Achsen sind parallel.*

Der oben gefundene Satz über die Tangenten in P an $\mathfrak{P}$ und in $\mathfrak{G}$ an $\mathfrak{P}_1$ muss natürlich auch für den Kreis N gelten, dessen Mittelpunkt in den Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ des zum Parabelscheitel A gehörigen Krümmungskreises fällt. Da nun die von A an $\mathfrak{P}$ gelegte Tangente, die Scheiteltangente,

die Achse in A trifft, so müssen auch die an den Krümmungskreis $\mathfrak{A}$ in den Endpunkten $\mathfrak{G}^0$ und $\mathfrak{G}^0_1$ seines zur Richtung R parallelen Durchmessers $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ gelegten Tangenten durch den Scheitel A von $\mathfrak{P}$ hindurchgehen. Für den Krümmungskreis $\mathfrak{A}$ ist nun aber der Radius $\mathfrak{A}\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{A}\mathfrak{G}^0_1$ gleich dem Abstand seines Mittelpunkts $\mathfrak{A}$ vom Scheitel A. Also sind die Dreiecke $A\mathfrak{A}\mathfrak{G}^0$ und $A\mathfrak{A}\mathfrak{G}^0_1$ gleichschenklig, woraus folgt, dass die Tangente in den Endpunkten $\mathfrak{G}^0$ und $\mathfrak{G}^0_1$ des Durchmessers $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ des Krümmungskreises mit der Achse AM der Parabel $\mathfrak{P}$ und der Richtung R gleiche Winkel bildet. Da nun für einen die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt und zwar reell berührenden Kreis N, falls T und N in Bezug auf F symmetrisch liegen, die Strecke TN grösser als der Radius N$\mathfrak{G}$, für einen imaginär berührenden Kreis N aber kleiner als der Radius ist, so bildet im ersten Falle die Tangente in $\mathfrak{G}$ an $\mathfrak{P}_1$ mit der Richtung R einen grösseren, im andern Falle einen kleineren Winkel als mit der Achse AM. Steht im speziellen Falle die Richtung R auf AM senkrecht, so betragen die Winkel, die die Tangente in $\mathfrak{G}$ an $\mathfrak{P}_1$ und den Krümmungskreis mit der Richtung R und der Achse AM bildet, gerade $\frac{\pi}{4}$, während der von der Tangente und der Richtung R gebildete Winkel für reell berührende Kreise N des Systems grösser, für imaginär berührende kleiner ist.

Da auch bei der Parabel $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{A}\mathfrak{G}^0_1$, also Winkel $\mathfrak{G}^0A\mathfrak{G}^0_1 = \frac{\pi}{2}$ ist, so stehen bei Ellipse, Hyperbel und Parabel die in den Endpunkten $\mathfrak{G}^0$ und $\mathfrak{G}^0_1$ des zur Richtung R parallelen Durchmessers $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ des Krümmungskreises an die Kurve K_1 gelegten Tangenten aufeinander senkrecht. Wie also bei Ellipse und Hyperbel der Schnittpunkt dieser Tangenten dem Direktorkreise angehört, so schneiden sich bei der Parabel $\mathfrak{P}_1$ diese Tangenten in einem Punkte der Leitlinie. Damit ist die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{P}$ zugleich die Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}_1$.

Auch bei der Parabel lässt sich das System von Kreisen N selbständig definieren, also so, dass es nicht mit der Parabel in Verbindung gebracht zu werden braucht. Zwischen dem Radius r und der Entfernung x des Mittelpunktes N eines jeden Kreises des Systems von dem Brennpunkt F der Parabel $\mathfrak{P}$ besteht, wie auf Seite 48 nachgewiesen wurde, die Beziehung

$$r^2 = 2\,\pi x,$$

wenn 2π den Parameter der Parabel $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Somit haben sämtliche Kreise des Systems N die Eigenschaft, dass das Verhältnis des Quadrates des Radius zum Abstand des Mittelpunktes von einem festen Punkte der gemeinsamen Zentrale den konstanten Wert 2π hat, wobei diese Konstante grade dem Parameter der obigen Parabel $\mathfrak{P}$ gleich ist. Damit können die gefundenen Ergebnisse auch wie folgt wiedergegeben werden.

Satz: *Werden in einem System von Kreisen* N, *dessen Mittelpunkte auf einer Graden liegen und das weiterhin dadurch definiert ist, dass das Quadrat des Radius eines jeden Kreises* N *dem Abstand seines Mittelpunktes von einem festen Punkt der gemeinsamen Zentrale proportional ist, alle Durchmesser gezogen, die einer bestimmten Richtung* R *angehören, so ist der Ort ihrer Endpunkte eine Parabel, die durch den festen Punkt hindurchgeht und die Grade zur Leitlinie hat, die auf der Zentrale in dem Punkte senkrecht steht, dessen doppelter Abstand — in entgegengesetztem Sinne zu den Abständen der Mittelpunkte — von dem festen Punkt den Proportionalitätsfaktor zur Masszahl hat.*

Wir kehren zu dem Mittelpunktskegelschnitt K und zu dem daraus abgeleiteten Kegelschnitt K_1 zurück. Dieser Kegelschnitt K_1 entstand durch die Endpunkte der nach einer fest gegebenen Richtung R parallel gezeichneten Durchmesser der den K doppelt berührenden Kreise D. Wird nun die Richtung R geändert, so wird jeder Richtung R ein

bestimmter Kegelschnitt K_1 entsprechen. Es wird also ein ganzes System von Kegelschnitten K_1 entstehen, das kurz mit S (K_1) bezeichnet werden soll. Ueber diese Kegelschnitte lässt sich folgendes aussagen.

Da die zu sämtlichen Richtungen R parallelen Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der als unendlich kleine Kreise D zu denkenden Brennpunkte selbst unendlich klein sind, so laufen alle Kegelschnitte K_1 zunächst durch die reellen oder imaginären Brennpunkte F und F_1 der Achse $AA_1 = 2a$ von K hindurch. Sie haben ferner, da FF_1 stets die zur Richtung R parallelen Sehnen des K_1 halbiert, FF_1 zum gemeinsamen Durchmesser und sind daher untereinander und mit K konzentrisch. Der diesem Durchmesser FF_1 in jedem K_1 konjugierte Durchmesser GG_1 ist der zugehörigen Richtung R parallel. Da diese Durchmesser GG_1 aber sämtlich Durchmesser des Kreises M des Systems sind, dessen Berührungssehne mit K die andre Achse $BB_1 = 2b$ des K mit den reellen oder imaginären Scheiteln B und B_1 ist, so sind alle diese dem Durchmesser FF_1 in sämtlichen Kegelschnitten des S $(K_1$ konjugierten Durchmesser GG_1 einander gleich und zwar gleich der Achse BB_1 des K, also mit dieser Achse reell oder imaginär. In allen Kegelschnitten K_1 ist daher die Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser konstant. Bezeichnet man die Längen der Durchmesser FF_1 und GG_1 mit 2f und 2g, so ist, da in K

$$FF_1 = 2c \text{ und } GG_1 = 2b$$

ist,
$$f^2 + g^2 = c^2 + b^2.$$

Nun ist aber in K ferner

$$c^2 + b^2 = a^2,$$

also
$$f^2 + g^2 = a^2.$$

Für alle Kegelschnitte des S (K_1) ist daher die Summe der Quadrate zweier beliebigen konjugierten Durchmesser gleich dem Quadrat des Durchmessers $AA_1 = 2a$ des Kegelschnitts K. Da nun aber der um den Mittelpunkt eines Kegelschnitts beschriebene Kreis M_0, dessen Durchmesser die Eigenschaft hat, dass sein Quadrat gleich der Summe der Quadrate zweier konjugierten Durchmesser ist, den geometrischen

Ort aller Punkte darstellt, die zu einander rechtwinklige Tangenten an ihn senden, so kommt auch dem über der Achse AA_1 als Durchmesser gezeichneten Kreise die Eigenschaft zu, dass die aus irgend einem seiner Punkte an jeden Kegelschnitt des S (K_1) gelegten Tangenten einen rechten Winkel einschliessen. Ferner wurde gezeigt, dass jeder Kegelschnitt K_1 des Systems den K in den Endpunkten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers HH_1 berührt und zwar in denjenigen Punkten, in denen die Normalen der zugehörigen Richtung R parallel sind. Somit haben die Kegelschnitte des S (K_1) den K zur Enveloppe. Da die dem gemeinsamen Durchmesser HH_1 eines Kegelschnitts K_1 und des K in K und K_1 konjugierten Durchmesser $LL = 2l$ und $L_1L_1 = 2l_1$ stets den gemeinsamen Tangenten beider Kurven in H und H_1 parallel sind, so fallen die Durchmesser LL und L_1L_1 aufeinander. Da nun der Durchmesser HH_1 sich mit jedem Kegelschnitt des S (K_1) ändert, so trägt jeder Durchmesser des K noch einen Durchmesser eines gewissen Kegelschnitts K_1, die beide die Eigenschaft haben, dass die ihnen in K und K_1 konjugierten Durchmesser sowohl nach Richtung als auch nach Grösse zusammenfallen. Nun gilt aber in jedem Kegelschnitt des S (K_1)

$$h^2 + l_1^2 = f^2 + g^2 = a^2$$

und in K $\quad h^2 + l^2 = a^2 + b^2.$

Demnach ist $\quad l^2 - l_1^2 = b^2.$

Für alle Kegelschnitte des Systems gilt daher, dass die Differenz der Quadrate der Durchmesser, die in K und in jedem K_1 dem beiden gemeinsamen Durchmesser konjugiert sind, gleich dem Quadrate der Achse $BB_1 = 2b$ des K ist. (II., 407, 408).

Schneidet ein den Kegelschnitt K doppelt berührender Kreis D einen beliebigen K_1 in den Endpunkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ des Kreisdurchmessers $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, so treffen bekanntlich die in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ an K_1 gelegten Tangenten die Achse AA_1 des K in demselben Punkte T, in dem auch die in den Berührungspunkten P und P_1 von K und Kreis D an K gelegten Tangenten sich schneiden. Hierbei ist die Sehne $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ des K_1

stets der dem Kegelschnitt K_1 entsprechenden Richtung R parallel. Wird nun die Richtung R geändert, so behält mit dem fest bleibenden Kegelschnitt K und dem ebenso unveränderlichen Kreise D auch der Schnittpunkt T der Tangenten in den Berührungspunkten P und P_1 an beide Kurven auf AA_1 seine Lage bei. Da aber durch T stets die an K_1 gelegten Tangenten in den Schnittpunkten $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ des Kreises D und des Kegelschnittes K_1 laufen, so gilt der

Satz: *Legt man an sämtliche Kegelschnitte des* $S(K_1)$ *in den Schnittpunkten mit einem den Kegelschnitt* K *doppelt berührenden Kreise, welche die Endpunkte seines der Richtung* R *angehörenden Durchmessers sind, die Tangenten, so laufen diese sämtlich durch denselben Punkt der Achse* AA_1 *des* K. — *Legt man umgekehrt aus einem beliebigen Punkte* T *der Achse* AA_1 *des* K *an sämtliche Kegelschnitte des* $S(K_1)$ *die Tangenten, so liegen deren Berührungspunkte auf einem Kreise, der den Kegelschnitt* K *in den Punkten doppelt berührt, die die Berührungspunkte der von* T *an* K *gelegten Tangenten sind. Die Berührungssehnen aller aus* T *an die* K_1 *gelegten Tangentenpaare sind die Durchmesser des Kreises. (II., 408.)*

Da sich das System der den Kegelschnitt K doppelt berührenden Kreise D auch, wie auf Seite 52 nachgewiesen wurde, ohne Abhängigkeit von K definieren lässt, so können die eben gewonnenen Ergebnisse auch wie folgt zusammengefasst werden.

Satz: *Ist ein System von Kreisen* D *mit gemeinsamer Zentrale gegeben, das die Eigenschaft besitzt, dass das Verhältnis des Quadrates des Radius* r *eines jeden Kreises zu dem Rechteck aus den Abständen seines Mittelpunktes* D *von zwei festen reellen oder imaginären Punkten* F *und* F_1 *der Zentrale einen konstanten Wert hat, so liegen die Endpunkte* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{S}_1$ *der parallel gezogenen Durchmesser* $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ *aller Kreise bei jeder Richtung* R *in einem Kegelschnitt* K_1. *Alle diese Kegelschnitte* K_1 *haben die Verbindungsstrecke* FF_1 *der beiden festen*

Punkte zum gemeinsamen Durchmesser und sind daher konzentrisch. Die diesem Durchmesser in allen Kegelschnitten des $S(K_1)$ *konjugierten Durchmesser* GG_1 *sind zugleich die gesamten Durchmesser des Kreises* D *des Systems, der den Halbierungspunkt* M *der Strecke* FF_1 *zum Mittelpunkt hat, also alle einander gleich. Daher ist für alle* K_1 *die Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser konstant. Ist demnach* $FF_1 = 2f$ *und* $GG_1 = 2g$, *so hat der um den Punkt* M *als Mittelpunkt beschriebene Kreis, dessen Radius* $\rho = \sqrt{f^2 + g^2}$ *ist, die Eigenschaft, dass die aus irgend einem Punkte seines Umfanges an jeden* K_1 *gelegten Tangenten stets einen rechten Winkel einschliessen. Die Kegelschnitte des* $S(K_1)$ *haben ferner einen mit ihnen konzentrischen Kegelschnitt* K *zur Enveloppe, der die beiden festen Punkte* F *und* F_1 *zu Brennpunkten hat. Die auf* FF_1 *liegenden Scheitel* A, A_1 *des* K *sind zugleich die Endpunkte eines Durchmessers des oben erwähnten um den Punkt* M *mit dem Radius* ρ *beschriebenen Kreises. Die dem gemeinsamen Durchmesser* HH_1 *der Enveloppe* K *und je eines Kegelschnittes* K_1 *des Systems in* K *und* K_1 *konjugierten Durchmesser* $LL = 2l$ *und* $L_1L_1 = 2l_1$ *fallen auf einander, und die Differenz ihrer Quadrate ist konstant, nämlich gleich der andern Achse* $BB_1 = 2b$ *des* K.

Die Enveloppe aller Kegelschnitte K_1 ist, wie oben gefunden wurde, der Kegelschnitt K. Da nun jeder K_1 durch die Endpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ der zu einer bestimmten Richtung R gehörenden Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der Kreise D des Systems entsteht, so ist der Kegelschnitt K auch die Enveloppe der Kreise D. Demnach gilt der

Satz: *Ist ein System von Kreisen* D *gegeben mit der Eigenschaft, dass das Quadrat des Radius eines jeden der Kreise zu dem Rechteck aus den Abständen seines Mittelpunktes von zwei festen reellen oder imaginären Punkten der gemeinsamen Zentrale ein konstantes Verhältnis hat,*

so ist die Enveloppe aller dieser Kreise ein Kegelschnitt, der die beiden festen Punkte zu Brennpunkten hat. Seine auf dieser Achse senkrechte andre Achse ist zugleich Durchmesser des Kreises D, *der den Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke der beiden festen Punkte zum Mittelpunkt hat.*

Werden in allen Kreisen N, die eine Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berühren, nach einer beliebigen, aber festen Richtung R die Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ gezogen, so ist der Ort ihrer Endpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ eine neue Parabel $\mathfrak{P}_1$. Wird nun die Richtung R beständig geändert, so wird jeder Richtung R eine bestimmte Parabel $\mathfrak{P}_1$ entsprechen. Es entsteht also dadurch ein ganzes System von Parabeln $S(\mathfrak{P}_1)$, über die sich folgendes aussagen lässt.

Da die zu sämtlichen Richtungen R parallelen Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ des als unendlich kleiner Kreis N zu denkenden Brennpunkts F der Parabel $\mathfrak{P}$ selbst unendlich klein sind, so laufen alle Parabeln $\mathfrak{P}_1$ durch den Punkt F hindurch und haben, weil die Achse FM von $\mathfrak{P}$ stets die zur Richtung R parallelen Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der $\mathfrak{P}_1$ halbiert, FM zum gemeinsamen Durchmesser. Alle Parabeln des $S(\mathfrak{P}_1)$ haben somit parallele Achsen. Die diesem Durchmesser FM in jeder $\mathfrak{P}_1$ konjugierte Richtung ist der zugehörigen Richtung R parallel, sodass die an jede $\mathfrak{P}_1$ in F gelegte Tangente die ihr entsprechende Richtung R angibt. Da, wie sich oben ergab, die der festen Richtung R zukommende Parabel $\mathfrak{P}_1$ die gegebene Parabel $\mathfrak{P}$ ausser im unendlich fernen Punkte in dem Punkte H berührt, dessen gemeinsame Tangente an beide Kurven zur Richtung R senkrecht ist, so ist jeder Punkt der $\mathfrak{P}$ der Berührungspunkt mit einer Parabel des $S(\mathfrak{P}_1)$, nämlich mit der Parabel $\mathfrak{P}_1$, deren zugehörige Richtung R die Richtung der Normale der $\mathfrak{P}$ im Berührungspunkt ist. Die Parabel $\mathfrak{P}$ ist daher die Enveloppe der in ihrem Innern liegenden Parabeln $\mathfrak{P}_1$.

Schneidet nun ein die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berührender Kreis N die $\mathfrak{P}_1$ in den Endpunkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ des der

Richtung R angehörenden Durchmessers $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ des Kreises N und sind P und P_1 die Berührungspunkte von $\mathfrak{P}$ und N, so schneiden sich die in P und P_1 an $\mathfrak{P}$ und die in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ an $\mathfrak{P}_1$ gelegten Tangenten in demselben Punkt T der Achse AM von $\mathfrak{P}$. Wird die Richtung R nun beständig geändert, so bleiben sowohl die Parabel $\mathfrak{P}$ als auch der Kreis N fest; mithin muss auch der Schnittpunkt T der in den Berührungspunkten P und P_1 von $\mathfrak{P}$ und N an beide Kurven gelegten Tangenten seine Lage beibehalten. Legt man daher an sämtliche Parabeln des $S(\mathfrak{P}_1)$ in den Schnittpunkten mit einem die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berührenden Kreise, die die Endpunkte seines der Richtung R angehörenden Durchmessers sind, die Tangenten, so laufen diese sämtlich durch denselben Punkt T der Achse AM von $\mathfrak{P}$. — Legt man umgekehrt aus einem beliebigen Punkt T der Achse AM der Parabel $\mathfrak{P}$ an alle Parabeln $\mathfrak{P}_1$ die Tangentenpaare, so liegen deren Berührungspunkte stets in einem die $\mathfrak{P}$ doppelt berührenden Kreise, und zwar in dem Kreise, dessen Berührungssehne mit $\mathfrak{P}$ die Verbindungslinie der Berührungspunkte der von T an $\mathfrak{P}$ gelegten Tangenten ist. Die Berührungssehnen aller dieser Tangentenpaare sind zugleich Durchmesser des Kreises.

Das System der die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berührenden Kreise N kann nun aber ebenfalls selbständig definiert werden, wie bereits oben nachgewiesen wurde. Damit lauten die bisherigen Ergebnisse etwa wie folgt.

Satz: *Ist ein System von Kreisen* N *gegeben, dem die Eigenschaft zukommt, dass das Quadrat des Radius eines jeden der Kreise dem Abstand seines Mittelpunktes von einem festen Punkte der gemeinsamen Zentrale aller Kreise* N *proportional ist, so liegen die Endpunkte* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{S}_1$ *der nach beliebigen Richtungen* R *parallel gezogenen Durchmesser* $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ *aller Kreise jedesmal in einer Parabel* $\mathfrak{P}_1$. *Alle diese Parabeln* $\mathfrak{P}_1$ *haben die Zentrale der Kreise* N *zum gemeinsamen Durchmesser, sodass ihre Achsen sämtlich parallel sind. Alle Parabeln* $\mathfrak{P}_1$ *schneiden sich in dem festen Punkt ihres gemeinsamen*

Durchmessers, und die in ihm an jede $\mathfrak{P}_1$ gelegte Tangente ist der der $\mathfrak{P}_1$ zukommenden Richtung R *parallel. Die Parabeln des* $S(\mathfrak{P}_1)$ *haben eine Parabel* $\mathfrak{P}$ *zur gemeinsamen Enveloppe, deren Brennpunkt der feste Punkt der Zentrale aller Kreise, also der allen* $\mathfrak{P}_1$ *gemeinsame Punkt, und deren Achse zu den Achsen aller* $\mathfrak{P}_1$ *parallel ist. Die Scheiteltangente der Parabel* $\mathfrak{P}$ *ist die Leitlinie aller Parabeln* $\mathfrak{P}_1$.

Da, wie sich oben herausstellte, die Parabel $\mathfrak{P}$ die Enveloppe aller Parabeln $\mathfrak{P}_1$ ist, jede $\mathfrak{P}_1$ aber durch die Endpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ der zu einer bestimmten Richtung R gehörenden Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der Kreise N entsteht, so ist die Parabel $\mathfrak{P}$ auch die Enveloppe der Kreise N. Damit gilt der

Satz: *Ist ein System von Kreisen dadurch definiert, dass das Quadrat des Radius eines jeden Kreises zu dem Abstand seines Mittelpunktes von einem festen Punkte der allen Kreisen gemeinsamen Zentrale ein konstantes Verhältnis hat, so ist die Enveloppe aller Kreise eine Parabel, die den festen Punkt zum Brennpunkt und die Zentrale zur Achse hat. Ihr Parameter* 2π *ist gleich dem konstanten Verhältnis.*

Die Systeme der Kegelschnitte K, die einen Kegelschnitt K_1 in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers doppelt berühren.

Nicht uninteressant sind auch die Ergebnisse, die man durch Umkehrung der eben bewiesenen Sätze erhält.

Es liege nun ein Mittelpunktskegelschnitt K_1 vor. Zieht man dann in K_1 die einer beliebigen Richtung R angehörenden Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, so liegen deren Mitten D bekanntlich in dem Durchmesser FF_1 von K_1, dessen Richtung der Richtung R konjugiert ist. Legt man nun den Durchmesser FF_1 und seinen konjugierten Durchmesser GG_1 als X- und

Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems zu Grunde und setzt die Längen der Durchmesser $FF_1 = 2f$ und $GG_1 = 2g$, so lautet die Gleichung von K_1

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1,$$

aus der sich sofort ergibt

$$y^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2).$$

Konstruiert man alsdann das System von Kreisen D, welche die Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ zu Durchmessern haben, so gilt je für den Radius r und die Abscisse x des Mittelpunktes die Beziehung

$$r^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2)$$

oder

$$r^2 = \frac{g^2}{f^2}(f + x)(f - x).$$

Nun ist aber $f + x = FD$ und $f - x = DF_1$, also ist

$$r^2 = \frac{g^2}{f^2} \cdot FD \cdot DF_1.$$

Da somit das Verhältnis der Quadrate der Radien aller Kreise zum Rechteck aus den Abständen ihrer Mittelpunkte von den beiden festen Punkten F und F_1 einen konstanten Wert besitzt, so ist, wie oben nachgewiesen wurde, die Enveloppe der Kreise D ein Kegelschnitt, der die Punkte F und F_1 zu Brennpunkten, also die Grade FF_1 zur Achse hat. Die Scheitel der andern Achse sind, wie gezeigt wurde, die Endpunkte B und B_1 des auf FF_1 senkrechten Durchmessers des Kreises D, dessen Mittelpunkt der Halbierungspunkt M der Strecke FF_1 ist. Der Radius dieses Kreises M ist nun aber, da hier $x = 0$ ist, gleich g. Also ist die Achse BB_1 der Enveloppe K gleich 2g, demnach gleich dem dem Durchmesser FF_1 konjugierten Durchmesser GG_1 des Kegelschnitts K_1. Da die lineare Excentricität des K, wie gefunden, $FF_1 = 2f$ ist, so hat seine auf FF_1 liegende Achse AA_1 die Länge

$AA_1 = 2\sqrt{f^2 + g^2}$. Das Quadrat der Achse AA_1 der Enveloppe K ist mithin gleich der Summe der Quadrate je zweier konjugierten Durchmesser von K_1.

Die Enveloppe K der Kreise D kann man in der üblichen Weise bestimmen. Führt man dazu unter Beibehaltung der Graden FF_1 als X-Achse ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen Y-Achse die auf FF_1 in M errichtete Senkrechte ist, und nennt die bisher mit x bezeichnete veränderliche Abscisse MD des Mittelpunktes D der Kreise nunmehr λ, so ist die Gleichung eines Systems der Kreise D

$$S(D) \equiv (x - \lambda)^2 + y^2 - \frac{g^2}{f^2}(f^2 - \lambda^2) = 0.$$

Um nun die Gleichung der gesuchten Enveloppe zu erhalten, hat man den veränderlichen Parameter λ aus der Gleichung für S(D) und der durch Differentiation nach dem Parameter λ erhaltenen Gleichung

$$-\frac{1}{2}S'(D) \equiv x - \lambda - \frac{g^2}{f^2}\lambda = 0$$

zu eliminieren. Setzt man den aus S'(D) folgenden Wert

$$\lambda = \frac{xf^2}{f^2 + g^2}$$

in die obige Gleichung ein, so findet man als Gleichung der Enveloppe

$$\frac{x^2}{f^2 + g^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung eines Mittelpunktskegelschnitts K, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt M, also der Mittelpunkt von K_1 ist und für den zwei konjugierte Durchmesser mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Da das vorliegende Koordinatensystem aber rechtwinklig ist, so stellen die auf einander senkrechten Durchmesser die Achsen des Kegelschnitts K dar. Die Enveloppe K des Systems von Kreisen D ist somit ein mit dem gegebenen Kegelschnitt K_1 konzentrischer Kegelschnitt K, dessen Achsen die Längen $AA_1 = 2\sqrt{f^2 + g^2}$ und $BB_1 = 2g$ haben. Hieraus ergibt

sich sofort, dass die Entfernung der beiden Brennpunkte des K oder die Excentricität $2\sqrt{AA_1^2 - BB_1^2} = 2f$ ist. Nun sind aber die Punkte F und F_1 vom Mittelpunkt M je um die Strecke f entfernt. Also hat die Enveloppe K die Endpunkte F und F_1 des zur Richtung R konjugierten Durchmessers FF_1 von K_1 zu Brennpunkten.

Das Quadrat der Achse AA_1 der Enveloppe K ist, wie eben gefunden wurde, gleich der Summe der Quadrate je zweier konjugierten Durchmesser des K_1. Mithin hat der mit K und K_1 konzentrische Kreis M_0, dessen Radius ρ gleich der Hälfte der Achse AA_1 ist, die Eigenschaft, dass die aus jedem seiner Punkte an den K_1 gelegten Tangenten auf einander senkrecht stehen. Der über der Achse AA_1 des K als Durchmesser konstruierte Kreis ist demnach der Direktorkreis des Kegelschnitts K_1. Somit schliessen auch die beiden von A oder A_1 an K_1 gelegten Tangenten einen rechten Winkel ein, und ihre Berührungssehne ist wie stets dem Durchmesser parallel, der dem nach ihrem Schnittpunkt laufenden Durchmesser der Kurve konjugiert ist. Nun ist aber FF_1 der nach diesem Schnittpunkt A laufende Durchmesser, und da FF_1 und GG_1 konjugiert sind, so gehört die Berührungssehne der von A an K_1 gelegten Tangenten zu dem System der Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ von K_1. Nennt man sie deshalb $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$, so ist das Dreieck $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1 A$ rechtwinklig. Also läuft der über $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ als Durchmesser beschriebene Kreis $\mathfrak{A}$ auch durch A hindurch, und da er wie alle über den Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ als Durchmessern beschriebenen Kreise D den Kegelschnitt K doppelt berührt, so ist der Kreis $\mathfrak{A}$ der Krümmungskreis von K in seinem Scheitel A, $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ Durchmesser dieses Kreises $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ der zu A gehörige Krümmungsmittelpunkt.

Wie schon bemerkt, gibt es stets zwei Tangenten und daher auch zwei Normalen eines zentrischen Kegelschnitts K, die einer bestimmten Richtung parallel sind. Somit muss zweimal der Fall eintreten, dass eine Normale des K der Richtung R angehört. Ist H der Fusspunkt dieser Normale

und D ihr Schnittpunkt mit der Achse AA_1 des K, so berührt der um D als Mittelpunkt mit DH als Radius beschriebene Kreis D den K doppelt. Die Endpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ der der Richtung R angehörenden Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der Kreise D sind nun zugleich Punkte des K_1. Da aber der nach H laufende Durchmesser des Kreises D dem Durchmessersystem $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ angehört, so ist H zugleich ein Punkt des K_1. Für jeden Kreis D laufen indessen die in seinen Berührungspunkten P und P_1 mit K an K und die in seinen Schnittpunkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ mit K_1 an K_1 gelegten Tangenten durch denselben Punkt T der Achse AA_1 des K; und da hier Punkt P mit $\mathfrak{G}$ zusammenfällt, so haben K und K_1 in ihrem gemeinsamen Punkt H dieselbe Tangente. Mithin berühren sich K und K_1 in H. Dasselbe gilt auch für den andern Punkt H_1 von K, dessen Normale der Richtung R angehört. Da nun die Kurven in H und H_1 parallele Normalen, also auch parallele Tangenten haben, so sind H und H_1 die Endpunkte eines dem K_1 und K gemeinsamen Durchmessers. Die beiden Kegelschnitte berühren sich demnach in den Endpunkten eines ihnen gemeinsamen Durchmessers HH_1, und zwar in den Punkten H und H_1, in denen die Tangenten des K_1 zur Richtung R normal sind.

Nun sind aber FF_1 und der der Richtung R angehörende Durchmesser GG_1 von K_1 konjugiert. Die Tangenten in F und F_1 sind somit der Richtung R parallel, bilden also mit den in H und H_1 an K_1 gelegten Tangenten rechte Winkel. Demnach sind die Brennpunkte F und F_1 des K und die Berührungspunkte H und H_1 von K mit K_1 die Berührungspunkte der Seiten eines dem K_1 umschriebenen Rechtecks.

Da ferner die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers eines zentrischen Kegelschnitts dem konjugierten Durchmesser parallel sind, so fallen die dem gemeinsamen Durchmesser $HH_1 = 2h$ des K_1 und des K in beiden Kurven konjugierten Durchmesser aufeinander. Sind diese Durchmesser $L_1L_1 = 2l_1$ und $LL = 2l$, so gilt

in K_1 $\qquad f^2 + g^2 = h^2 + l_1^2$

und in K $\qquad f^2 + g^2 + g^2 = h^2 + l^2$,

woraus sich sofort ergibt

$$l^2 - l_1^2 = g^2 = b^2.$$

Bei Zusammenfassung der wichtigeren der eben gewonnenen Resultate besteht daher der

Satz: *Konstruiert man über den nach einer beliebigen, aber festen Richtung* R *parallel gezogenen Sehnen* $\mathfrak{GG}_1$ *eines zentrischen Kegelschnitts* K_1 *als Durchmessern die Kreise* D, *so ist deren Enveloppe ein Kegelschnitt* K, *dessen Brennpunkte die Schnittpunkte* F *und* F_1 *der gemeinsamen Zentrale der Kreise* D *mit* K_1 *sind. Die auf* FF_1 *senkrechte Achse des* K *ist gleich dem der Richtung* R *angehörenden Durchmesser des* K_1. *Die Kegelschnitte* K_1 *und* K *berühren sich in den Punkten, in denen die an* K_1 *und* K *gelegten Tangenten zur Richtung* R *normal sind, und zwischen den dem gemeinsamen Durchmesser beider Kurven in* K_1 *und* K *konjugierten Durchmessern* $2l_1$ *und* 2l *besteht stets die Beziehung*

$$l^2 - l_1^2 = b^2,$$

wenn 2b *die Länge der Achse des* K *bezeichnet, die auf* FF_1 *senkrecht ist. (II., 408, 409.)*

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, welcher Art der Kegelschnitt K ist, je nachdem der Kegelschnitt K_1 als Ellipse oder als Hyperbel angenommen wird. Als Gleichung für K ergab sich

$$\frac{x^2}{f^2 + g^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1,$$

worin 2f und 2g die Längen zweier konjugierten Durchmesser FF_1 und GG_1 des K_1 bezeichnen.

Ist nun K_1 eine Ellipse $\mathfrak{E}_1$, so sind bekanntlich die beiden Durchmesser stets reell. Da dann also sowohl f^2 als auch g^2 positiv ist, die Gleichung des K somit

$$\frac{x^2}{f^2 + g^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1$$

lautet, so ist der Kegelschnitt K ebenfalls eine Ellipse $\mathfrak{E}$.

Ist aber der Kegelschnitt K_1 eine Hyperbel $\mathfrak{H}_1$, so ist der eine von zwei konjugierten Durchmessern reell, der andere aber imaginär. Wird zunächst FF_1 als reell angenommen, so ist f^2 positiv und g^2 negativ, wofür dann besser $-g^2$ gesetzt wird. Also ist die Gleichung des in diesem Falle entstehenden Kegelschnitts K

$$\frac{x^2}{f^2-g^2}-\frac{y^2}{g^2}=1,$$

die, falls $f^2-g^2>0$ ist, eine Hyperbel $\mathfrak{H}$, falls $f^2-g^2<0$ ist, eine imaginäre Kurve $\mathfrak{I}$ darstellt.

Ist dagegen der Durchmesser GG_1 reell und daher FF_1 imaginär, sind also g^2 und $-f^2$ die Quadrate der halben Längen der Durchmesser, so erkennt man aus der Gleichung des dann sich ergebenden K

$$\frac{x^2}{g^2-f^2}+\frac{y^2}{g^2}=1,$$

dass er für $g^2-f^2>0$ eine Ellipse $\mathfrak{E}$ und für $g^2-f^2<0$ eine Hyperbel $\mathfrak{H}$ ist.

Konstruiert man demnach über allen nach einer festen Richtung R parallel gezogenen Sehnen eines Kegelschnitts K_1 als Durchmessern die Kreise, so werden diese, wenn K_1 eine Ellipse ist, von einer Ellipse, wenn aber K_1 eine Hyperbel ist, von einer Ellipse, Hyperbel oder einer imaginären Kurve eingehüllt. (II., 411.)

Bezeichnet wieder $2h$ die Länge des hier als reell angenommenen Durchmessers, der den Kurven K_1 und K gemeinsam ist, und sind $2l_1$ und $2l$ die Längen der Durchmesser, die diesem in K_1 und K konjugiert sind, so gilt im ersten Falle

in $\mathfrak{E}_1$ $\quad f^2+g^2=h^2+l_1^2$

und in $\mathfrak{E}$ $\quad f^2+g^2+g^2=h^2+l^2,$

also $\quad g^2=l^2-l_1^2.$

Da im zweiten Falle

in $\mathfrak{H}_1$ $\quad f^2-g^2=h^2-l_1^2$

und in $\mathfrak{H}$ $\quad f^2-g^2-g^2=h^2-l^2$ ist,

so gilt $\quad g^2=l^2-l_1^2.$

Im letzten Falle endlich ist

in $\mathfrak{H}_1$ $\quad g^2 - f^2 = h^2 - l_1^2$

und in $\mathfrak{E}$ $\quad g^2 + g^2 - f^2 = h^2 + l^2,$

somit $\quad g^2 = l^2 + l_1^2.$

Aehnliche Untersuchungen wie bei dem zentrischen Kegelschnitt sollen nun auch in dem Falle der Parabel angestellt werden. Zieht man in einer Parabel $\mathfrak{P}_1$ die Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, die einer beliebigen, aber festen Richtung R angehören, so liegen deren Mitten N bekanntlich auf einem Durchmesser von $\mathfrak{P}_1$, und zwar dem Durchmesser FM, dessen Endpunkt F die Eigenschaft besitzt, dass die in ihm an $\mathfrak{P}_1$ gelegte Tangente der Richtung R parallel ist. Nimmt man nun diesen Durchmesser als X-Achse und die Tangente als Y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt also F ist, und bezeichnet die Entfernung FA des Punktes F von der Leitlinie der $\mathfrak{P}_1$ mit π, so lautet die Gleichung von $\mathfrak{P}_1$

$$y^2 = 2\pi x.$$

Konstruiert man alsdann das System von Kreisen N, die die Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ zu Durchmessern haben, so sind die Ordinaten y der Endpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ der Sehnen der $\mathfrak{P}_1$ zugleich die Radien r der Kreise N, deren Mittelpunkt N mit den Punkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ gleiche Abscissen haben. Ist daher x die Abscisse des Mittelpunkts eines jeden der Kreise N und ist r sein Radius, so ist stets

$$r^2 = 2\pi x.$$

Die Kreise N haben demnach die Eigenschaft, dass das Quadrat des Radius eines jeden Kreises zum Abstand seines Mittelpunkts von einem festen Punkt F der gemeinsamen Zentrale aller Kreise ein konstantes Verhältnis 2π hat. Die Enveloppe der Kreise N ist demnach, wie genau nachgewiesen wurde, eine Parabel $\mathfrak{P}$, die den Punkt F zum Brennpunkt und die Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}_1$ zur Scheiteltangente hat.

Die Enveloppe $\mathfrak{P}$ der Kreise N kann aber auch analytisch geometrisch bestimmt werden. Führt man dazu unter Beibehaltung des Durchmessers FM als X-Achse ein neues Koordinatensystem ein, dessen Y-Achse die im Punkte F auf

FM errichtete Senkrechte ist, und nennt die bisher mit x bezeichnete veränderliche Abscisse FN der Mittelpunkte der Kreise N nunmehr λ, so ist, da der Radius r eines jeden Kreises N der Beziehung

$$r^2 = 2\pi\lambda$$

genügt, die Gleichung des Systems aller Kreise N

$$S(N) \equiv (x - \lambda)^2 + y^2 - 2\pi\lambda = 0.$$

Die Gleichung der gesuchten Enveloppe ergibt sich dann, wenn man aus dieser Gleichung und der Gleichung, die man aus ihr durch Differentiation nach dem Parameter λ erhält, die Grösse λ eliminiert. Da

$$-S'(N) \equiv 2x - 2\lambda + 2\pi = 0,$$

also

$$\lambda = \pi + x$$

ist, so lautet die erste Gleichung nach Einsetzung dieses Wertes

$$y^2 = 2\pi(x + \frac{\pi}{2}).$$

Die gesuchte Enveloppe der Kreise N ist demnach, wie sich von neuem herausstellt, eine Parabel $\mathfrak{P}$, deren Achse mit dem Durchmesser FM der Parabel $\mathfrak{P}_1$ zusammenfällt, also zur Achse der $\mathfrak{P}_1$ parallel ist. Der Scheitel A der $\mathfrak{P}$ liegt jenseits von F in der Entfernung $\frac{\pi}{2}$. Da diese Entfernung aber grade gleich dem vierten Teile des Parameters 2π der $\mathfrak{P}$ ist, so hat die Parabel $\mathfrak{P}$ den Punkt F der Parabel $\mathfrak{P}_1$ zum Brennpunkt. Die Scheiteltangente von $\mathfrak{P}$ endlich ist, wie man leicht erkennt, die Leitlinie von $\mathfrak{P}_1$, also der Ort der Punkte, die zu einander senkrechte Tangenten an die $\mathfrak{P}_1$ senden.

Mithin schliessen auch die beiden vom Scheitel A der Parabel $\mathfrak{P}$ an die Parabel $\mathfrak{P}_1$ gelegten Tangenten einen rechten Winkel ein, und ihre Berührungssehne gehört der Richtung an, die der Richtung des nach A laufenden Durchmessers der $\mathfrak{P}_1$ konjugiert ist. Nun ist aber FM dieser Durchmesser, und da FM und die Richtung R konjugiert sind, so gehört die Berührungssehne der von A an $\mathfrak{P}_1$ ge-

legten Tangenten zu dem System der Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der $\mathfrak{P}_1$. Wird sie deshalb $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ genannt, so läuft wegen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks $\mathfrak{G}^0 A \mathfrak{G}^0_1$ der über dem Durchmesser $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ beschriebene Kreis $\mathfrak{A}$ auch durch A hindurch. Da dieser Kreis aber wie alle über den Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ als Durchmessern beschriebenen Kreise N die Parabel $\mathfrak{P}$ doppelt berührt, so ist $\mathfrak{A}$ der Krümmungskreis der Parabel $\mathfrak{P}$ in ihrem Scheitel A und $\mathfrak{A}$ der dazugehörige Krümmungsmittelpunkt.

Wie schon früher bemerkt wurde, gibt es nur eine Tangente und daher auch nur eine Normale der Parabel, die einer bestimmten Richtung R angehört. Ist somit H der Fusspunkt der der Richtung R angehörenden Normale der $\mathfrak{P}$, und ist N ihr Schnittpunkt mit der Achse, so ist der um N als Mittelpunkt mit NH als Radius konstruierte Kreis ein Kreis, der $\mathfrak{P}$ doppelt berührt. Da nun die Endpunkte $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ der der Richtung R angehörenden Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der Kreise N Punkte der $\mathfrak{P}_1$ sind und der nach H laufende Durchmesser des betrachteten Kreises N dem Durchmessersystem $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ angehört, so ist H ein den Parabeln $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ gemeinsamer Punkt. Nun laufen aber für jeden Kreis N die in seinen Berührungspunkten P und P_1 mit $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{P}$ und die in seinen Schnittpunkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{P}_1$ an $\mathfrak{P}_1$ gelegten Tangenten stets durch denselben Punkt T der Achse FM. Da nun im vorliegenden Falle P und $\mathfrak{G}$ im Punkte H zusammenfallen, so haben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ in H dieselbe Tangente. Die beiden Parabeln berühren sich somit in dem Punkte, in dem die Normalen beider Kurven der Richtung R parallel sind. Nun sind aber FM und die Richtung R konjugiert; also ist die Tangente in F an $\mathfrak{P}_1$ der Richtung R parallel, bildet also mit der in H an $\mathfrak{P}_1$ gelegten Tangente einen rechten Winkel. Demnach schneiden sich die im Brennpunkt F der Parabel $\mathfrak{P}$ an die Parabel $\mathfrak{P}_1$ gelegte und die beiden Parabeln gemeinsame Tangente in ihrem Berührungspunkte auf der Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{P}$, die zugleich die Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}_1$ ist. Somit besteht der die gefundenen Ergebnisse zusammenfassende

Satz: *Die über den nach einer festen Richtung* R *gezogenen Sehnen* $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ *einer Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *als Durchmessern konstruierten Kreise* N *haben eine Parabel* $\mathfrak{P}$ *zur Enveloppe, deren Brennpunkt der Schnittpunkt F der gemeinsamen Zentrale der Kreise mit der Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *und deren Scheiteltangente die Leitlinie der* $\mathfrak{P}_1$ *ist. Die beiden Parabeln berühren sich ausser im unendlich fernen Punkte ihrer parallelen Achsen in dem Punkte, in dem die an jede von ihnen gelegte Tangente zur Richtung* R *normal ist. Diese Tangente trifft die im Brennpunkt der Parabel* $\mathfrak{P}$ *an die Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *gelegte Tangente in einem auf der Scheiteltangente der Parabel* $\mathfrak{P}$ *liegenden Punkte rechtwinklig.*

Wird nun die Richtung R nicht festgehalten, sondern soviel wie möglich geändert, so wird bei festgewählter Parabel $\mathfrak{P}_1$ jeder Richtung R eine bestimmte Parabel $\mathfrak{P}$ entsprechen. Es wird sich somit ein ganzes System von Parabeln $\mathfrak{P}$, ein $S(\mathfrak{P})$ ergeben.

Wie bei der eben angenommenen Richtung R die Mittelpunkte N der ihr parallelen Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ der Parabel $\mathfrak{P}_1$ auf einem ihrer Durchmesser liegen, dessen Endpunkt F der Brennpunkt der zugehörigen Parabel $\mathfrak{P}$ ist, so werden bei beständig veränderter Richtung R die Mitten der jedesmaligen Sehnen der $\mathfrak{P}_1$ einen ihrer Durchmesser erfüllen, dessen Schnittpunkt mit $\mathfrak{P}_1$ stets der Brennpunkt der jeder Richtung R entsprechenden Parabel $\mathfrak{P}$ ist. Während also die Richtung R soviel als möglich geändert wird, durchläuft der Brennpunkt der zu jeder Richtung R gehörigen Parabel $\mathfrak{P}$ die Parabel $\mathfrak{P}_1$. Da aber die Durchmesser der Parabel $\mathfrak{P}_1$ die Achsen der Parabeln $\mathfrak{P}$ sind, so sind die Achsen aller Parabeln des $S(\mathfrak{P})$ zur Achse der Parabel $\mathfrak{P}_1$ parallel. Ferner ist, wie oben gefunden wurde, die Scheiteltangente der der festen Richtung R zukommenden Parabel $\mathfrak{P}$ die Leitlinie der $\mathfrak{P}_1$; mithin berühren sämtliche Parabeln $\mathfrak{P}$ in ihren Scheiteln dieselbe mit der Parabel $\mathfrak{P}_1$ festgegebene Grade. Weiter berühren sich, wie $\mathfrak{P}_1$ und die betrachtete $\mathfrak{P}$, die gegebene

Parabel und jede Parabel des S($\mathfrak{P}$) in dem Punkte, in dem die Normale an $\mathfrak{P}$ der dieser Parabel entsprechenden Richtung angehört; und schliesslich schneidet, ganz entsprechend zu der oben behandelten Parabel $\mathfrak{P}$, die in diesen Berührungspunkten an jede Parabel $\mathfrak{P}$ gelegte Tangente die in ihrem Brennpunkt an die feste Parabel $\mathfrak{P}_1$ gezogene Tangente in einem Punkte der Leitlinie der $\mathfrak{P}_1$ rechtwinklig.

Satz: *Wird die Richtung* R *soviel als möglich geändert, so erhält man aus der als fest angenommenen Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *ein ganzes System von Parabeln* $\mathfrak{P}$, *deren Brennpunkte die Parabel* $\mathfrak{P}_1$ *durchwandern, während ihre Scheitel die Leitlinie der* $\mathfrak{P}_1$ *erfüllen.*

Aehnlich gestalten sich diese Untersuchungen auch in dem Falle, wo ein Mittelpunktskegelschnitt K_1 vorliegt. Aendert man hier die Richtung R beständig, so muss man ebenfalls für jede Richtung R einen ihr entsprechenden Kegelschnitt K erhalten, sodass auch in diesem Falle ein ganzes System S (K) von Kegelschnitten K entsteht.

Wie der früher eingehend behandelte Kegelschnitt K mit dem festgewählten Kegelschnitt K_1 konzentrisch ist, so haben zunächst alle den verschiedenen Richtungen R zukommenden Kegelschnitte K untereinander und mit K_1 denselben Mittelpunkt M. Da ferner die eine Achse BB_1 des oben erwähnten Kegelschnitts K gleich dem der Richtung R parallelen Durchmesser $GG_1 = 2g$ des K_1 und das Quadrat der andern Achse AA_1 gleich der Summe der Quadrate dieses Durchmessers $GG_1 = 2g$ und des ihm in K_1 konjugierten Durchmessers $FF_1 = 2f$ ist, so wird auch für jeden andern Kegelschnitt K des S (K) die Achse BB_1 gleich dem Durchmesser des K_1 sein, der der Richtung angehört, die dem betreffenden K zukommt, und entsprechend wird auch das Quadrat der andern Achse AA_1 eines jeden K gleich der Summe der Quadrate je zweier konjugierten Durchmesser des K_1 sein. Während also die Achse BB_1 mit der Richtung R auch ihre Richtung und Grösse ändert, ist die Achse AA_1 eines jeden K von konstanter Länge, denn ihr Quadrat ist

eine Konstante. Die Achsen AA_1 der konzentrischen Kegelschnitte K sind somit sämtlich Durchmesser eines Kreises M_0, dessen Punkten die Eigenschaft zukommt, an den K_1 Tangenten zu senden, die stets auf einander senkrecht stehen. Da die auf der Achse AA_1 liegenden Brennpunkte F und F_1 eines jeden K vom Mittelpunkt M stets den Abstand f haben, so sind sie zugleich die Endpunkte je eines Durchmessers FF_1 von K_1. Der Kegelschnitt K_1 ist demnach der geometrische Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte K.

Ferner berührt wie der oben besprochene Kegelschnitt K auch jeder Kegelschnitt des S (K) den gegebenen Kegelschnitt K_1 in den Endpunkten eines mit R veränderlichen, ihnen gemeinsamen Durchmessers HH_1, in dessen Endpunkten nämlich die Normalen des K_1 und des betreffenden K die Richtung R haben; und ebenso sind für jeden K die beiden Berührungspunkte H und H_1 mit K_1 und seine beiden Brennpunkte F und F_1 die Berührungspunkte der Gegenseitenpaare eines dem K_1 umschriebenen Rechtecks. Die Eckpunkte E, E^0, E_1, E^0_1 dieses Rechtecks liegen also als Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten des K_1 auf dem oben erwähnten Kreise M_0. Da aber die den festen K_1 in H und H_1 berührenden Gegenseiten dieses Rechtecks zugleich Tangenten des veränderlichen K und F und F_1 dessen Brennpunkte sind, so stellt der Kreis M_0 auch den Ort der Fusspunkte der aus den Brennpunkten F und F_1 sämtlicher Kegelschnitte des S (K) auf deren Tangenten gefällten Lote, also, wie sich schon oben ergab, den Kreis dar, der die Achsen AA_1 aller Kegelschnitte K zu Durchmessern hat.

Die Punkte H und H_1 sind die Endpunkte eines Durchmessers des K_1. Sie sind daher wie die Endpunkte aller Durchmesser des K_1 die Brennpunkte eines einer gewissen Richtung R zugehörigen Kegelschnitts K′ des S (K); und zwar ist dieser Kegelschnitt derjenige, dessen Richtung R die Richtung der zu dem Durchmesser HH_1 in K_1 konjugierten Richtung ist, also die Richtung der in H und H_1 an K_1 gelegten Tangenten. Da nun die in den Endpunkten F und F_1 des Durchmessers FF_1 an K_1 gelegten Tangenten

zu diesen rechtwinklig sind, so müssen die Normalen des Kegelschnitts K_1 in F und F_1 der Richtung der Tangenten in H und H_1, also der zum Durchmesser HH_1 konjugierten Richtung angehören. H und H_1 sind dann die Brennpunkte eines Kegelschnittes K′ des Systems S (K) und F und F_1 die Endpunkte eines Durchmessers des K_1, deren Normalen die zu dem Durchmesser HH_1 konjugierte, also die dem K′ entsprechende Richtung haben. Somit sind F und F_1 die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte K_1 und K′.

Ist also FF_1 ein beliebiger Durchmesser des Kegelschnitts K_1 und ist HH_1 der Durchmesser, in dessen Endpunkten H und H_1 die Normalen des K_1 die zur Richtung von FF_1 konjugierte Richtung haben, so sind F, F_1 und H, H_1 die Brennpunkte zweier Kegelschnitte K und K′ des S (K), von denen der Kegelschnitt K_1 den K in H und H_1 und den K′ in F und F_1 berührt. Die in H und H_1 an K und die in F und F_1 an K′ gelegten Tangenten bilden ein dem K_1 umschriebenes und dem früher genannten Kreise M_0 eingeschriebenes Rechteck.

Sind nun umgekehrt F, F_1 und H, H_1 die Berührungspunkte der Gegenseitenpaare eines dem K_1 umschriebenen Rechtecks, so sind z. B. die Punkte F und F_1 als Berührungspunkte paralleler Tangenten des K_1 die Endpunkte eines seiner Durchmesser, dessen konjugierter Durchmesser die Richtung der in F und F_1 an K_1 gelegten Tangenten hat. Da aber die Tangenten in H und H_1, die aus demselben Grunde wie vorher die Endpunkte eines Durchmessers sind, auf den Tangenten in F und F_1 senkrecht stehen, so sind die Normalen in H und H_1 der der Richtung FF_1 konjugierten Richtung parallel. F und F_1 sind daher die Brennpunkte eines Kegelschnitts K des Systems S (K), der den K_1 in H und H_1 berührt. Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass F und F_1 die Berührungspunkte des Kegelschnitts K′ des S (K) sind, dessen Brennpunkte mit H und H_1 zusammenfallen. Legt man somit von den Endpunkten eines Durchmessers des Kreises M_0 die Tangentenpaare an den K_1, so gibt es stets zwei Kegelschnitte K und K′ des Systems, welche die

einen einem Durchmesser des K_1 angehörenden Berührungspunkte der Tangenten zu Brennpunkten haben, während sie in den andern den K_1 berühren.

Die wichtigsten der gefundenen Eigenschaften des S(K) lassen sich etwa wie folgt wiedergeben.

Satz: *Die Kegelschnitte des* S(K) *haben mit dem gegebenen Kegelschnitt* K_1 *denselben Mittelpunkt* M *und eine gleiche Achse* AA_1, *deren Quadrat der Summe der Quadrate je zweier konjugierten Durchmesser des* K_1 *gleich ist. Die Achsen* AA_1 *sämtlicher Kegelschnitte* K *sind Durchmesser eines Kreises* M_0, *der in Bezug auf* K_1 *der Ort der Scheitel der ihm umschriebenen rechten Winkel ist, und die Brennpunkte* F *und* F_1 *dieser Achsen sind sämtliche Punkte des* K_1. *Der Kreis* M_0 *stellt ferner für jeden Kegelschnitt* K *des Systems den Ort der Fusspunkte der aus seinen Brennpunkten* F *und* F_1 *auf seine Tangenten gefällten Lote dar. Die andern Achsen* BB_1 *der Kegelschnitte* K *sind den einzelnen Durchmessern des* K_1 *gleich, nämlich je dem, der dem Durchmesser* FF_1 *konjugiert ist. Jeder Kegelschnitt* K *berührt den gegebenen Kegelschnitt* K_1 *in den Endpunkten* H *und* H_1 *eines ihnen gemeinsamen Durchmessers. Die beiden Brennpunkte* F *und* F_1 *und die beiden Berührungspunkte* H *und* H_1 *eines jeden* K *sind zugleich die Berührungspunkte der Gegenseitenpaare eines dem* K_1 *umschriebenen Rechtecks, und es gibt stets einen zweiten Kegelschnitt* K′ *des* S(K), *der* H *und* H_1 *zu Brennpunkten und* F *und* F_1 *zu Berührungspunkten hat. (II, 409, 410).*

Da der Kreis M_0 der Ort der Fusspunkte aller Lote ist, die aus den Brennpunkten F und F_1 eines jeden Kegelschnitts K des Systems auf seine Tangenten gefällt werden, so müssen die Tangenten aller Kegelschnitte K den Kreis M_0 schneiden. (II., 411).

Ist nun umgekehrt SS_1 eine beliebige Sehne dieses Kreises M_0, die den Kegelschnitt K_1 nicht reell schneidet, so müssen auf den in S und S_1 auf SS_1 errichteten Senkrechten die Brennpunkte F und F_1 des Kegelschnitts K liegen,

der SS_1 zur Tangente hat. Da die Brennpunkte aller Kegelschnitte K aber zugleich die Endpunkte eines Durchmessers des K_1 sind und jede der beiden Senkrechten den K_1 in zwei Punkten F,F′ und F_1,F_1' schneidet, so sind je zwei der vier Schnittpunkte F und F_1, und F′ und F_1', die einem Durchmesser des K_1 angehören, als Brennpunkte eines Kegelschnitts K des Systems anzusehen. Es gibt somit zwei Kegelschnitte K′ und K″, die die Sehne SS_1 des Kreises M_0 berühren. Jede den Kegelschnitt K_1 nicht reell schneidende Sehne des Kreises M_0 ist demnach Tangente zweier Kegelschnitte K′ und K″ des Systems S(K).

Berührt nun aber SS_1 selbst den K_1 in einem Punkte H, so sind die auf SS_1 in S und S_1 errichteten Lote ebenfalls Tangenten des K_1, da die von den Punkten S und S_1 des Kreises M_0 an K_1 gelegten Tangenten je zu einander rechtwinklig sind. Mithin fallen für diese Senkrechten die Schnittpunkte F und F′ und ebenso F_1 und F_1' zusammen. Demnach gibt es hier nur einen einzigen Kegelschnitt K, dessen Tangente SS_1 ist. Nun ist aber die Normale des K_1 in H, da sie zur Tangente SS_1 senkrecht ist, zur Tangente des K_1 in F parallel, und da die Richtung der Tangente in F die im Kegelschnitt K_1 zu dem Durchmesser FF_1 konjugierte Richtung ist, so hat die Normale des K_1 in H die zu FF_1 in K_1 konjugierte Richtung. Damit ist H einer der beiden Berührungspunkte des K_1 mit dem Kegelschnitt K, dessen Brennpunkte F und F_1 sind. Berührt mithin eine Sehne SS_1 des Kreises M_0 den Kegelschnitt K_1 in einem Punkte H, so ist H auch der Berührungspunkt der Sehne mit dem einzigen Kegelschnitt des S(K), der die Sehne zur Tangente hat. (II., 411.)

Die Kegelschnitte K berühren, wie oben auseinander gesetzt wurde, den besonderen Kreis M_0 je in den Endpunkten A,A_1 der einen Achse und den Kegelschnitt K_1 je in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers; somit bilden die Kurven M_0 und K_1 die gemeinsame Enveloppe aller K. Also gilt der

Satz: *Die Enveloppe aller Kegelschnitte* K *besteht aus zwei Teilen, nämlich aus dem Kegelschnitt* K_1 *und dem mit ihm konzentrischen Kreise* M_0, *dessen Radius gleich der Hälfte der konstanten Achse* AA_1 *aller Kegelschnitte* K_1 *ist. (II., 410.)*

Die Berührungspunkte F,F_1 und H,H_1 des dem K_1 umschriebenen Rechtecks $EE^0E_1E^0_1$ sind selbst die Eckpunkte eines ihm eingeschriebenen Vierecks. Da dessen Diagonalen FF_1 und HH_1 aber Durchmesser des K_1 sind, also einander halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Seine Seiten FH und F_1H_1 sind als Berührungssehnen der von zwei Gegenecken E und E_1 des dem K_1 umschriebenen Rechtecks $EE^0E_1E^0_1$ an den K_1 gelegten Tangenten dem der Diagonale EE_1 konjugierten Durchmesser parallel. Da aber die Diagonalen eines einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramms selbst konjugierte Durchmesser sind, so sind FH und F_1H_1 der andern Diagonale $E^0E^0_1$ des Rechtecks parallel. Ebenso lässt sich dies für das Gegenseitenpaar F_1H und FH_1 und für die Diagonale EE_1 nachweisen.

Nun sind aber F und F_1 die Brennpunkte des Kegelschnitts K, während H und H_1 zwei seiner Punkte sind. Somit ist nach bekannter Kegelschnittseigenschaft die Summe oder Differenz der Brennstrahlen der Kurvenpunkte H und H_1 konstant, also

$$FH \pm HF_1 = F_1H_1 \pm H_1F.$$

Diese Summe oder Differenz ist aber gleich der Länge der Achse AA_1, die zu den Brennpunkten F und F_1 gehört, also gleich $2\sqrt{f^2 + g^2}$ und somit auch gleich der Diagonale $EE_1 = E^0E^0_1$ des Rechtecks. Mithin besteht der

Satz: *Jedes dem* K_1 *eingeschriebene Viereck, dessen Ecken in den Berührungspunkten der Seiten eines ihm umschriebenen Rechtecks liegen, ist ein Parallelogramm. Seine Seiten sind den Diagonalen des Rechtecks parallel, und die Summe oder Differenz zweier benachbarten Seiten ist stets gleich der konstanten Diagonale des Rechtecks. (II., 410.)*

Anstatt durch geometrische Betrachtungen kann man auch durch die Methoden der analytischen Geometrie zu den gefundenen Ergebnissen gelangen, wie im folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Nimmt man den Kegelschnitt K_1 als gegeben an und lautet seine Gleichung

$$K_1 \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

so wird eine beliebige Richtung R durch den Durchmesser

$$R \equiv y - mx = 0$$

gegeben, worin m die Tangente des Winkels bezeichnet, der von der X-Achse und dem Durchmesser gebildet und in demselben Sinne gemessen wird. Die Schnittpunkte dieses Durchmessers R mit dem Kegelschnitt K_1 haben Koordinaten x und y, die den Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2m^2} \qquad \text{und} \qquad y^2 = \frac{a^2b^2m^2}{b^2 + a^2m^2}$$

genügen. Mithin ist das Quadrat der Länge des auf dem Durchmesser R liegenden Halbmessers $G_1M = MG$

$$g^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2\,(1 + m^2)}{b^2 + a^2m^2}.$$

Da nun für die Richtungskoeffizienten m und m′ zweier konjugierten Richtungen des K_1 die Beziehung

$$m\,m' = -\frac{b^2}{a^2}$$

besteht, so ergibt sich, wenn man m durch $-\frac{b^2}{a^2m}$ ersetzt,

$$f^2 = x^2 + y^2 = \frac{b^4 + a^4\,m^2}{b^2 + a^2\,m^2}.$$

Die auf die beiden konjugierten Durchmesser FF_1 und GG_1 bezogene Gleichung des Kegelschnitts K_1 lautet demnach

$$\frac{b^2 + a^2\,m^2}{b^4 + a^4\,m^2}\,x^2 + \frac{b^2 + a^2\,m^2}{a^2b^2(1+m^2)}\,y^2 - 1 = 0.$$

Wählt man nun mit Beibehaltung der Graden FF_1 als X-Achse die auf FF_1 im Mittelpunkte M errichtete Senkrechte als Y-Achse und bezeichnet die Abscissen der Mitten D der

zur Richtung R parallel gezogenen Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ des K_1 mit λ, dann ist, da die Radien r der über den Sehnen als Durchmessern beschriebenen Kreise D der Beziehung

$$r^2 = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2} - \frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^4+a^4m^2}\lambda^2$$

genügen, die Gleichung des Systems der Kreise D

$$S(D) \equiv (x-\lambda)^2+y^2-\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2} + \frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^4+a^4m^2}\lambda^2 = 0.$$

Die Enveloppe dieser Kreise ergibt sich dann, wenn man aus dieser Gleichung und der aus ihr durch Differentiation nach dem Parameter λ erhaltenen Gleichung

$$-\frac{1}{2}S'(D) \equiv x-\lambda-\frac{a^2b^2(1+m^2)\lambda}{b^4+a^4m^2} = 0$$

die veränderliche Grösse λ eliminiert. Setzt man den aus der letzten Gleichung folgenden Wert

$$\lambda = \frac{b^4+a^4m^2}{(a^2+b^2)(b^2+a^2m^2)}$$

in die erste Gleichung ein, so ergibt sich als Gleichung der gesuchten Enveloppe

$$K \equiv \frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2}} - 1 = 0\,.$$

Die Enveloppe ist demnach, wie auch schon früher gefunden wurde, ein mit K_1 konzentrischer Kegelschnitt K. Das Quadrat der einen Achse des K ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Achsen des K_1, und da das Quadrat über der halben Excentricität des K gleich dem Quadrat über den Halbmessern $FM = MF_1$ des K_1 ist, so sind die Brennpunkte des K die Endpunkte eines Durchmessers des K_1. Ferner ist das Quadrat über der andern Achse des K gleich dem Quadrate des dem Durchmesser FF_1 konjugierten Durchmessers GG_1 des K_1, so dass die zweite Achse des K grade dem andern Durchmesser des K_1 gleich ist. (II., 408.)

Konstruiert man nun über den allen möglichen Richtungen R angehörigen Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ des K_1 als Durchmessern die Kreise D, wobei in jedem Falle ein Kegelschnitt K entsteht, so

lässt sich ohne grosse Mühe auch der Ort der Endpunkte der veränderlichen Achsen aller Kegelschnitte K ermitteln. Da die Quadrate über den Hälften dieser Achsen, wie gefunden wurde, gleich $\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2}$ sind, so liegen die Endpunkte auf dem Kreise

$$\mathfrak{K} \equiv x^2 + y^2 - \frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2} = 0.$$

Ferner gehören sie aber immer der der Richtung R′ normalen Richtung $R^{(n)}$ an. Da nun die Richtungskoeffizienten m und m_1 von senkrechten Richtungen der Beziehung

$$m \cdot m_1 = -1$$

genügen und die Richtung

$$R' \equiv y + \frac{b^2}{a^2 m} x = 0$$

ist, so gilt für die Richtung

$$R^{(n)} \equiv y - \frac{a^2 m}{b^2} x = 0.$$

Eliminiert man nun aus den beiden Gleichungen $\mathfrak{K}$ und $R^{(n)}$ den veränderlichen Parameter m, so ergibt sich als Gleichung des gesuchten Ortes

$$(x^2+y^2)\,(a^2x^2+b^2y^2) - a^4x^2 - b^4y^2 = 0$$

oder in veränderter Form

$$(x^2+y^2)(a^2x^2+b^2y^2+a^2b^2) = (a^2+b^2)(a^2x^2+b^2y^2).$$

(II., 409.) Die Endpunkte der veränderlichen Achsen der Kegelschnitte K erfüllen mithin eine Kurve vierter Ordnung, die, weil das absolute Glied fehlt und die Koeffizienten der linearen Glieder gleich Null sind, im Koordinatenanfangspunkt einen Doppelpunkt hat. Da ferner ihre Schnittpunkte mit der X-Achse die Abscisse $x = \pm a$ und die Schnittpunkte mit der Y-Achse die Ordinate $y = \pm b$ haben, so läuft die Kurve C^4, die in Bezug auf die beiden Achsen symmetrisch ist, durch die Achsenscheitel des zuerst gegebenen Kegelschnitts K_1 hindurch.

Da die Grösse $\frac{b^4+a^4m^2}{b^2+a^2m^2}$ das Quadrat der halben Excen-

tricität eines jeden Kegelschnitts K darstellt, so liegen die Brennpunkte aller K auf dem Kreise, dessen Gleichung

$$\mathfrak{K}' \equiv x^2 + y^2 - \frac{b^4 + a^4m^2}{b^2 + a^2m^2} = 0$$

lautet. Da sie aber stets auf dem der Richtung R′ angehörenden Durchmesser

$$R' \equiv y + \frac{b^2}{a^2m}\, x = 0$$

des K_1 liegen, so hat man, um den Ort der Brennpunkte des S(K) zu bestimmen, den aus der letzten Gleichung sich ergebenden Wert

$$m = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

in die Gleichung $\mathfrak{K}'$ einzusetzen. Man erhält dann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also die Gleichung des Kegelschnitts K_1. Somit ist von neuem bewiesen, dass die Brennpunkte aller Kegelschnitte des Systems S(K) auf dem Kegelschnitt K_1 liegen. (II., 409.)

Endlich kann man auch leicht die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}$ aller Kegelschnitte K in ihren Achsenscheiteln A und A_1 aufstellen. Da der Punkt $\mathfrak{A}$ vom Mittelpunkt M eines Kegelschnitts, dessen Achsen und Excentricität die Längen 2α, 2β, 2γ haben, den Abstand $\frac{\gamma^2}{\alpha}$ hat und im vorliegenden Falle die Grössen $\frac{b^4 + a^4m^2}{b^2 + a^2m^2}$ und $a^2 + b^2$ die Quadrate der betreffenden Längen γ und α sind, so liegt der Punkt $\mathfrak{A}$ zunächst auf dem Kreise, dessen Gleichung

$$\mathfrak{K}^0 \equiv x^2 + y^2 - \left(\frac{b^4 + a^4m^2}{(b^2 + a^2m^2)\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 0$$

lautet. Die Punkte $\mathfrak{A}$ liegen aber ferner auf dem Durchmesser

$$R' \equiv y + \frac{b^2}{a^2m}\, x = 0.$$

Man hat also nur m aus beiden Gleichungen zu eliminieren und findet als Gleichung des gesuchten Ortes

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2(a^2 + b^2) = a^4b^4(x^2 + y^2).$$

(II., 410.) Somit liegen die Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}$ aller Kegelschnitte des S(K) in den Scheiteln ihrer Achsen AA_1 in einer Kurve vierter Ordnung, die in Bezug auf die Koordinatenachsen symmetrisch ist und im Koordinatenanfangspunkt einen Doppelpunkt besitzt. Sie trifft ausserdem die X-und die Y-Achse in Punkten, die vom Mittelpunkt M den Abstand $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ haben. Da ferner

$$x^2 + y^2 = 0$$

die Gleichung des Tangentenpaares in M an die Kurve darstellt, die Tangenten also imaginär sind, so ist der Mittelpunkt M ein isolierter Doppelpunkt der Kurve.

Nun sind aber die Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}$ in den Scheiteln A und A_1 der Achsen AA_1 sämtlicher Kegelschnitte K zugleich die Mittelpunkte der Sehnen $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ der Kegelschnitte K. Zieht man daher in jedem Kegelschnitt des S(K) die Tangentenpaare aus den Scheiteln A und A_1 seiner Achse AA_1 an den Kegelschnitt K_1, so ist der Ort der Mitten der Berührungssehnen eine Kurve vierter Ordnung, deren Gleichung

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2(a^2 + b^2) = a^4b^4(x^2 + y^2)$$

ist.

Man kann indessen den Ort der Mitten der Sehnen $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ auch unmittelbar dadurch finden, wenn man den veränderlichen Parameter aus der Gleichung der veränderlichen Sehne $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ und des ihr konjugierten Durchmessers eliminiert. Da die Sehne $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ die Polare eines beliebigen Punktes des um M mit $MA = \sqrt{a^2 + b^2}$ beschriebenen Kreises in Bezug auf K_1 ist und die Koordinaten eines jeden Kreispunktes von der Form

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos u \qquad \text{und} \qquad y = \sqrt{a^2 + b^2}\sin u$$

sind, so lautet die Gleichung der Sehne

$$\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1 \equiv b^2 x \cos u + a^2 y \sin u - \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Da ihr Richtungsfaktor

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{cotg} u,$$

der Richtungsfaktor der konjugierten Richtung also

$$m' = \operatorname{tg} u$$

ist, so hat der der Sehne $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ konjugierte Durchmesser die Gleichung

$$R' \equiv y - \operatorname{tg} u \cdot x = 0.$$

Hieraus folgt nun

$$\operatorname{tg} u = \frac{y}{x},$$

woraus sich ergibt

$$\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Setzt man nun diese Werte in die Gleichung der Sehne $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ ein, dann erhält man die schon oben gefundene Gleichung

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2(a^2 + b^2) = a^4b^4(x^2 + y^2)$$

der Kurve vierter Ordnung.

Man kann sich ohne Mühe zwei Durchmesser dieser Kurve verschaffen. Die von dem einen und andern der Endpunkte A und A_1 der Achse AA_1 eines jeden Kegelschnitts des S(K) an den K_1 gelegten Tangenten stehen, wie auf Seite 84 früher auseinandergesetzt wurde, auf einander senkrecht. Da nun die Tangenten des einen Paares zu denen des andern parallel sind, so ist das von ihnen gebildete Viereck $AA^0A_1A^0_1$ ein dem K_1 umschriebenes Rechteck von der Art des Rechtecks $EE^0E_1E^0_1$, dessen Endpunkte A^0 und A^0_1 mithin die Endpunkte eines Durchmessers des ausgezeichneten Kreises M_0 sind. Sind nun $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ die Berührungspunkte von AA^0 und AA^0_1 mit K_1 und berühren $A_1A^0_1$ und A_1A^0 den K_1 in $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$, so sind $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}$ die Polaren der Punkte A, A^0_1, A_1, A^0 des Kreises M_0 in Bezug auf den Kegelschnitt K_1, also

Durchmesser von Krümmungskreisen in den Scheiteln der Achsen AA_1 von zwei Kegelschnitten K und K'. Da dann die Schnittpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ mit AA_1 und die Schnittpunkte $\mathfrak{A}^0_1$ und $\mathfrak{A}^0$ von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}$ mit $A^0_1A^0$ die Mitten der vier Krümmungskreise, also vier Krümmungsmittelpunkte sind, die zu je zwei auf einer durch M laufenden Graden AA_1 und $A^0_1A^0$ liegen, so sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}^0_1\mathfrak{A}^0$ zwei Durchmesser der Kurve vierter Ordnung. Nun ist aber in dem dem früher genannten Parallelogramm FHF_1H_1 entsprechenden Parallelogramm $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \text{ und } \mathfrak{A}^0_1\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3;$$

also ist jeder Durchmesser $\mathfrak{A}^0_1\mathfrak{A}^0$ der Kurve vierter Ordnung gleich dem Durchmesser $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ der Krümmungskreise in den Scheiteln A und A_1 der Achse AA_1 des Kegelschnitts K, dessen zugehörige Richtung R die Richtung von $\mathfrak{A}^0_1\mathfrak{A}^0$ ist. Da nach einem auf Seite 88 bewiesenen Satze die Summe oder Differenz zweier benachbarten Seiten eines dem K_1 eingeschriebenen Parallelogramms, dessen Ecken die Berührungspunkte der Seiten eines ihm umschriebenen Rechtecks sind, konstant und zwar gleich der Diagonale $AA_1 = 2\sqrt{f^2 + g^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ des Rechtecks ist, wenn 2f und 2g die Längen zweier konjugierten Durchmesser, 2a und 2b die der Achsen des K_1 bezeichnen, so ist

$$\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \pm \mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3 = 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

also auch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \pm \mathfrak{A}^0_1\mathfrak{A}^0 = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}^0_1\mathfrak{A}^0$ sind nun solche Durchmesser der Kurve vierter Ordnung, die auf zwei konjugierten Durchmessern FF_1 und GG_1 des K_1 liegen. Also gilt der

Satz: *Der Ort der Krümmungsmittelpunkte* $\mathfrak{A}$ *aller Kegelschnitte des Systems* S (K) *in den Scheiteln ihrer Achsen* AA_1 *ist eine Kurve vierter Ordnung. Ihre Durchmesser sind einzeln den Durchmessern der Krümmungskreise in denselben Scheiteln der* K *gleich, und für je zwei Durchmesser, die auf konjugierte Durchmesser des Kegelschnitts* K_1 *fallen, hat entweder die Summe oder die Differenz*

einen konstanten Wert, und zwar ist diese Konstante gleich dem Durchmesser des ausgezeichneten Kreises M_0. *(II., 410, 411).*

Zu diesem Resultat gelangt man auch auf folgende Weise. Der Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ des zum Scheitel A eines K gehörigen Krümmungskreises hat bekanntlich vom Mittelpunkt M des K den Abstand $\mathfrak{A}M = \frac{\gamma^2}{\alpha}$, wenn 2α die Länge der Achse AA_1 und 2γ die Entfernung der Brennpunkte F und F_1 dieser Achse ist. Da nun für einen Kegelschnitt des S (K) die Achse $AA_1 = 2\sqrt{f^2 + g^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$ und $FF_1 = 2f$ ist, wobei dann der zu FF_1 in K_1 konjugierte und auf $A^0{}_1A^0$ liegende Durchmesser die Länge $GG_1 = 2g$ besitzt, so ist

$$\mathfrak{A}M = \frac{f^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Für den Kegelschnitt K′ des Systems, der $A^0{}_1A^0$ zur Achse hat, gilt entsprechend

$$\mathfrak{A}^0{}_1M = \frac{g^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Somit ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}M + M\mathfrak{A}_1 = \frac{2f^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\mathfrak{A}^0{}_1\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^0{}_1M + M\mathfrak{A}^0 = \frac{2g^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

also

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}^0{}_1\mathfrak{A}^0 = 2\frac{f^2+g^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\sqrt{a^2+b^2},$$

womit die Beziehung noch einmal bewiesen ist. (II., 411).

Wie sich oben herausstellte, ist der Durchmesser $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0{}_1$ des zum Scheitel A oder A_1 eines jeden K gehörenden Krümmungskreises eine ausgezeichnete Sehne des Systems $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ in K_1. Er ist zugleich die Berührungssehne der von A und A_1 an den K_1 gelegten Tangenten. Wird nun die Richtung R soviel als möglich geändert, so erfüllen die Endpunkte A und A_1 der Achsen AA_1 der veränderlichen K die ganze Peripherie des bekannten Kreises M_0, während die

Sehnen $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ stets die Berührungssehnen der von jedem Endpunkt A oder A_1 der Achse AA_1 eines jeden K an den K_1 gelegten Tangenten, also die Polaren der Punkte des Kreises M_0 in Bezug auf den festen K_1 sind. Die von den Sehnen $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ eingehüllte Kurve ist also die Polarfigur des Kreises M_0 in Bezug auf K_1, und weil M_0 und K_1 Kegelschnitte sind, selbst ein Kegelschnitt C [1]). Da sowohl M_0 als auch K_1 in Bezug auf die Achsen von K_1 symmetrisch sind, so muss auch C in Bezug auf sie symmetrisch liegen. Daher haben K_1 und C dieselben Achsen, sind somit konzentrisch. Die Längen der Achsen des C lassen sich einfach bestimmen. Schneidet die Achse $A'A'_1$ von K_1 den Kreis M_0 in den Punkten A'' und A''_1, so ist die Berührungssehne der von A'' an K_1 gelegten Tangenten als Polare des Punktes A'' von M_0 eine Tangente an C. Da nun A'' der Achse des K_1 angehört, so muss diese Tangente auf $A'A'_1$ senkrecht stehen und ist daher, weil $A'A'_1$ auch eine Achse von C ist, die Tangente in dem einen Scheitel dieser Achse von C. Mithin ist der Schnittpunkt $\mathfrak{A}'$ der Polare von A'' in Bezug auf K_1 der eine Scheitel der Achse $A'A'_1$ des C. Bezeichnet man nun $M\mathfrak{A}'$ mit a_1, so ergibt sich, da ja $MA' = a$ und $MA'' = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist, aus der Harmonizität der Punkte A', A'_1, $\mathfrak{A}'$, A'' die Beziehung

$$a_1 : a = a : \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dasselbe gilt entsprechend für die andre Achse des K_1. Ist deren Länge $2b$ und $2b_1$ die Länge der auf ihr liegenden Achse des C, so gilt

$$b_1 : b = b : \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Somit umhüllen die Durchmesser $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ der Krümmungskreise in den Scheiteln A und A_1 der Kegelschnitte des S (K) einen mit K_1 konzentrischen Kegelschnitt C, dessen Achsen mit denen von K_1 zusammenfallen. Sind $2a$ und $2b$ die Längen der Achsen des K_1, so haben die Achsen von C die Längen

[1]) J. Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie II. 3. Aufl. 1898. Seite 141.

$$\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Der Kegelschnitt C berührt somit die zweite der oben genannten Kurven vierter Ordnung in seinen Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen, also in seinen Scheiteln.

Da endlich, wie man leicht erkennt, die Kegelschnitte K_1 und C konfokal sind, so gilt der

Satz: *Die Enveloppe der besonderen Sehnen* $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$, *welche Durchmesser der Krümmungskreise in den Scheiteln* A *der Kegelschnitte* K *sind, ist ein mit* K_1 *konfokaler Kegelschnitt, der die Polarfigur des Kreises* M_0 *in Bezug auf den Kegelschnitt* K_1 *ist. (II., 410).*

Der Kegelschnitt C kann auch rein analytisch einfach bestimmt werden. Behält man das bisherige Koordinatensystem bei, dessen Achsen die Achsen von K_1 sind, so hat, da $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ der Radius des Kreises M_0 ist, ein beliebiger Punkt P dieses Kreises die Koordinaten

$x = \sqrt{a^2+b^2}\cos u$ und $y = \sqrt{a^2+b^2}\sin u$,

wobei u den Winkel bezeichnet, den der nach P gezogene Radius MP mit der positiven Richtung der X-Achse bildet. Da nun die Gleichung des Kegelschnitts

$$K_1 \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

lautet, so ist

$$P \equiv b^2 x\cos u + a^2 y \sin u - \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

die Gleichung der Polare von P in Bezug auf K_1. Um nun die Gleichung der Kurve zu erhalten, die von den Polaren sämtlicher Punkte von M_0 eingehüllt wird, muss man diese Gleichung nach u differentiieren und aus beiden Gleichungen den Parameter u eliminieren. Da aus der differentiierten Gleichung

$$P' \equiv -b^2x\sin u + a^2y\cos u = 0$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{a^2y}{b^2x}$$

folgt und

$$\sin u = \frac{a^2 y}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}} \quad \text{und} \quad \cos u = \frac{b^2 x}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}$$

ist, so ergibt sich als Gleichung der Enveloppe der Sehnen $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$

$$\frac{x^2}{\frac{a^4}{a^2+b^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^4}{a^2+b^2}} = 1,$$

aus der man sämtliche bereits angeführte Eigenschaften herauslesen kann. (II., 410.)

Zwischen den Längen 2a und 2b der Achsen des Kegelschnitts K_1 und den Achsen $2a_1$ und $2b_1$ des Kegelschnitts C bestehen, wie man sofort erkennt, noch folgende einfachen Beziehungen

$$a_1 : b_1 = a^2 : b^2;$$
$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2;$$
$$a^2 = a_1(a_1 + b_1); \qquad b^2 = b_1(a_1 + b_1);$$
$$(a_1 + b_1)^2 = a^2 + b^2;$$
$$a_1 b_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2};$$
$$ab = (a_1 + b_1)\sqrt{a_1 b_1}. \qquad \text{(II., 412.)}$$

Der Kegelschnitt C ist jedoch nicht nur die Enveloppe der Sehnen $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$ aller Kegelschnitte K. Wie sich auf Seite 94 herausstellte, sind nämlich die Seiten $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}$ des dem K_1 eingeschriebenen Parallelogramms vier Sehnen der Art $\mathfrak{G}^0\mathfrak{G}^0_1$; denn sie sind die Polaren der Endpunkte A, A_1 und A^0_1, A^0 der Achsen AA_1 und $A^0_1 A^0$ zweier Kegelschnitte K und K′ des S(K) in Bezug auf K_1. Somit ist C auch die Enveloppe aller Parallelogramme $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ oder FHF_1H_1, deren Endpunkte die Berührungspunkte eines dem K_1 umgeschriebenen Rechtecks $AA^0_1A_1A^0$ oder $EE^0_1E_1E^0$ sind. Je zwei Gegenecken eines jeden dieser Parallelogramme sind aber die Brennpunkte eines Kegelschnittes K, der den K_1 in dem andern Gegeneckenpaar berührt. So sind z. B. F und F_1 die Brennpunkte des K, dessen Berührungspunkte mit K_1 die Punkte H und H_1 sind. Da dann bekanntlich die gemeinsame Tangente und die ebenso gemeinsame Normale der Kegelschnitte K

und K_1 in H die von den Brennstrahlen FH und F_1H gebildeten Winkel hälften, so ist die Tangente oder Normale des K_1 in dem Eckpunkte H des Parallelogramms FHF_1H_1 die Halbierungslinie des Winkels, der von den in H zusammenstossenden Seiten FH und F_1H gebildet wird. Dasselbe gilt in gleicher Weise auch für die übrigen Ecken des Parallelogramms. Nun besteht aber der von Steiner[1]) bewiesene Satz: Unter allen einer gegebenen Kurve eingeschriebenen gradlinigen m-seitigen Polygonen kann nur bei demjenigen der Umfang ein Minimum oder ein Maximum sein, welches die Eigenschaft hat, dass seine Winkel durch die Normalen der Kurve gehälftet werden. Ist daher K_1 eine Ellipse, so ist der Umfang eines derartigen der Ellipse eingeschriebenen Parallelogramms, nämlich eines Parallelogramms, dessen Winkel von den Normalen der Ellipse in den Eckpunkten halbiert werden, ein Maximum; und zwar ein Maximum deshalb, weil Parallelogramme von kleinerem Umfang der $\mathfrak{E}_1$ eingeschrieben werden können, z. B. FXF_1X_1, wenn X und X_1 die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers von $\mathfrak{E}_1$ sind. Denn trifft FX den K in Y, so ist

$$FX + XF_1 < FY + YF_1 = FH_1 + H_1F_1.$$

Demnach haben die einer Ellipse $\mathfrak{E}_1$ eingeschriebenen Parallelogramme, für die die Halbierungslinien der Winkel zugleich die Normalen der Ellipse in den Ecken sind, von allen der Kurve eingeschriebenen Vierecken den grössten Umfang. Es gilt also der

Satz: *Unter allen einer gegebenen Ellipse $\mathfrak{E}_1$ eingeschriebenen Vierecken haben diejenigen den grössten — und unter einander gleichen — Umfang, deren Ecken in den Berührungspunkten der Seiten der der Ellipse umgeschriebenen Rechtecke liegen. (II., 411.)*

Da die Endpunkte eines jeden Durchmessers FF_1 der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ als Ausgangspunkte für die Konstruktion solcher Parallelogramme angesehen werden können, so gibt es unendlich viel solcher Parallelogramme, deren Umfang ein Maximum ist.

---

[1]) Steiner, Gesammelte Werke, Band II. Seite 241.

Der Wert dieses Maximums lässt sich sehr einfach ermitteln. Bekanntlich ist die Summe zweier benachbarten Seiten FH und HF_1 des Parallelogramms FHF_1H_1 gleich der konstanten Diagonale $EE_1 = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ des Rechtecks $EE^0E_1E^0{}_1$, dessen Seiten den K_1 in F, H_1, F_1 und H berühren. Somit ist der Umfang aller dieser besonderen Parallelogramme, also der grösste Wert des Umfanges, den ein dem K_1 eingeschriebenes Parallelogramm oder beliebiges Viereck haben kann,

$$U = 4\sqrt{a^2 + b^2}. \qquad \text{(II., 412.)}$$

Sehr einfach lässt sich der Inhalt der der $\mathfrak{E}_1$ umschriebenen Rechtecke $AA^0A_1A^0{}_1$ oder $EE^0E_1E^0{}_1$, sowie der ihm eingeschriebenen Parallelogramme $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ oder FHF_1H_1 berechnen. Bezeichnet man nämlich den von den Diagonalen des Rechtecks $AA^0A_1A^0{}_1$ gebildeten Winkel AMA^0 mit w, so ist der Inhalt R des Rechtecks gleich dem vierfachen Inhalt des Dreiecks AMA^0, also

$$R = 2MA \cdot MA^0 \sin w.$$

Nun sind aber MA und MA^0 Radien des Kreises M_0, dessen Punkte bekanntlich rechtwinklige Tangenten an den K_1 senden. Sind also 2a und 2b die Längen der Achsen der Ellipse $\mathfrak{E}_1$, so ist

$$MA = MA^0 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Somit wird

$$R = 2(a^2 + b^2)\sin w.$$

Der Inhalt P des zu dem Rechteck $AA^0A_1A^0{}_1$ gehörigen Parallelogramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ ergibt sich ganz ähnlich, nämlich als vierfacher Inhalt des Parallelogramms $\mathfrak{A}M\mathfrak{A}^0\mathfrak{G}$, dessen Seiten, wie schon ermittelt,

$$\mathfrak{A}M = \frac{f^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad M\mathfrak{A}^0 = \frac{g^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

sind. Da der von ihnen eingeschlossene Winkel

$$\mathfrak{A}M\mathfrak{A}^0 = AMA^0 = w$$

ist, so ist

$$P = 4 \cdot \frac{f^2 g^2}{a^2 + b^2} \cdot \sin w.$$

Nun gilt aber

$$fg \sin w = ab,$$

womit sich als Inhalt des Parallelogramms ergibt

$$P = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)\sin w.}$$

Der Winkel w ist nun in beiden Fällen der Winkel, der von zwei konjugierten Durchmessern FF_1 und GG_1 des K_1 gebildet wird, also ein mit dem Rechteck oder dem Parallelogramm veränderlicher Winkel. Somit ist auch der Inhalt der der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ umschriebenen Rechtecke, sowie der ihr eingeschriebenen Parallelogramme, deren Ecken die Berührungspunkte solcher Rechtecke mit $\mathfrak{E}_1$ sind, nicht konstant. Nimmt w den grössten möglichen Wert an, so besitzt auch sin w den grössten Wert; daher ist R in diesem Falle ein Maximum, dagegen P ein Minimum. Besitzt dagegen w den kleinsten möglichen Wert, so wird R ein Minimum und P ein Maximum. Da aber

$$R \cdot P = 8a^2b^2$$

ist, so hat in allen Fällen das Produkt der Inhalte zugehöriger Rechtecke und Parallelogramme einen konstanten, von dem Winkel w unabhängigen Wert. Es gilt demnach der

Satz: *Der Inhalt* R *der der Ellipse* $\mathfrak{E}_1$ *umschriebenen Rechtecke und der Inhalt* P *der ihr in den Berührungspunkten mit diesen Rechtecken eingeschriebenen Parallelogramme ist eine Funktion des Winkels, den die Diagonalen des Rechtecks oder die Seiten des Parallelogramms mit einander bilden. Das Produkt der Inhalte eines jeden Rechtecks und des ihm zugehörigen Parallelogramms ist aber konstant, nämlich*

$$R \cdot P = 8a^2b^2. \qquad \textit{(II., 413)}$$

Es kommt nun darauf an, den grössten und kleinsten Wert zu bestimmen, den P und R annehmen können. Bekanntlich ist unter allen Winkeln w, die von zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse $\mathfrak{E}_1$ gebildet werden, der der grösste, der von den Achsen eingeschlossen wird, während der von den gleichen konjugierten Durchmessern gebildete Winkel am kleinsten ist. Da im ersten Falle $w = \frac{\pi}{2}$, also

$\sin w = 1$ ist, so ist, wenn R_m und P_n den grössten Wert von R und den kleinsten Wert von P bezeichnen,

$$R_m = 2(a^2+b^2) \text{ und } P_n = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}; \quad \text{also } R_m \cdot P_n = 8a^2b^2.$$

Der Wert w des Winkels im zweiten Falle muss erst berechnet werden. Ist x die halbe Länge jedes der beiden gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ und w_0 der von beiden gebildete Winkel, so gilt

$$x^2 \sin w_0 = ab$$

und

$$2x^2 = a^2 + b^2.$$

Somit ist der gesuchte Winkel w_0 gegeben durch

$$\sin w_0 = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Für diesen Winkel w_0 nimmt, wie bereits erwähnt, R einen kleinsten Wert R_n, P dagegen einen grössten Wert P_m an. Diese Werte sind

$$R_n = 4ab \text{ und } P_m = 2ab,$$

deren Produkt wiederum $R_n \cdot P_m = 8a^2b^2$ ist.

In dem ersten Falle, wo $w = \frac{\pi}{2}$ ist, liegen $\mathfrak{A}M$ und $M\mathfrak{A}^0$ auf den Achsen; im zweiten Falle, der durch $\sin w_0 = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ gegeben ist, fallen sie mit den gleichen konjugierten Durchmessern der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ zusammen. Da also die Seiten des Parallelogramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ einmal den Achsen, das andere Mal den gleichen konjugierten Durchmessern parallel sind, so gilt der

Satz: *Der Inhalt der der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ umschriebenen Rechtecke ist ein Maximum oder ein Minimum und der der ihnen zugehörigen Parallelogramme gleichzeitig ein Minimum oder ein Maximum, wenn die Diagonalen des Rechtecks auf die Achsen oder die gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse fallen oder wenn die Seiten des Parallelogramms jenen Achsen oder diesen Durchmessern parallel sind. (II., 413.)*

Die Inhalte R und P der Rechtecke und Parallelogramme lassen sich übrigens auch durch die Achsen $2a_1$ und $2b_1$ des oben behandelten Kegelschnitts C ausdrücken. Da

$$a_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{und} \qquad b_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ist, so nehmen die eben ermittelten Werte folgende Form an

$$R = 2\,(a_1 + b_1)^2 \sin w; \qquad P = \frac{4\,a_1\,b_1}{\sin w};$$

$$R \cdot P = 8\,a_1\,b_1\,(a_1 + b_1)^2;$$

$$R_m = 2\,(a_1 + b_1)^2; \qquad P_n = 4\,a_1 b_1;$$

$$R_n = 4\,(a_1 + b_1)\,\sqrt{a_1\,b_1}; \qquad P_m = 2(a_1+b_1)\,\sqrt{a_1\,b_1}.$$

Dazu kommen noch die folgenden einfachen Beziehungen:

$$R_m \pm R_n = 2\,(a \pm b)^2;$$

$$P_m \pm P_n = 2\,(\sqrt{a_1} \pm \sqrt{b_1})^2\,\sqrt{a_1\,b_1}.$$

Bezeichnet man endlich die Inhalte des Kreises M_0 und der beiden Ellipsen $\mathfrak{E}_1$ und C kurz durch M_0, $\mathfrak{E}_1$ und C, so ist, wie man leicht erkennt,

$$M_0 = (a^2 + b^2)\,\pi; \qquad \mathfrak{E}_1 = a\,b\,\pi; \qquad C = \frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2}\,\pi.$$

Mithin gilt

$$M_0 : \mathfrak{E}_1 = a^2 + b^2 : a\,b;$$

$$\mathfrak{E}_1 : C = a^2 + b^2 : a\,b;$$

also

$$M_0 \cdot C = \mathfrak{E}_1{}^2 = a^2 b^2 \pi^2.$$

Wie sich für die der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ eingeschriebenen Parallelogramme F H F_1 H_1 oder $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$ herausstellte, dass sie von allen der Ellipse eingeschriebenen Vierecken den grössten Umfang haben, so lässt sich für sie auch eine Minimumeigenschaft leicht ermitteln. Diese Parallelogramme, für die der Punkt M stets der Schnittpunkt der Diagonalen ist, sind nämlich, wie oben gefunden wurde, der Ellipse C umschrieben. Sind nun $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ die Berührungspunkte der Seiten $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_3\,\mathfrak{G}$ des Parallelogramms $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$, so schneiden sich die in diesen Punkten auf den Seiten errichteten Senkrechten in den Eckpunkten $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ eines Parallelogramms, für welches M ebenfalls der Schnitt-

punkt der Diagonalen ist. Da aber, wie eine einfache Betrachtung lehrt, die Diagonalen $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3$ dieses Parallelogramms $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$ den Halbierungslinien der Winkel des Parallelogramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ parallel sind, und diese, wie bewiesen, auf einander senkrecht stehen, so sind auch die Diagonalen $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3$ zu einander normal. Somit ist das von den Normalen der Ellipse C in den Punkten $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ gebildete Parallelogramm ein Rhombus. Nun hat aber, wie Steiner in seinen Untersuchungen über Maximum und Minimum nachweist, von allen einer Ellipse umschriebenen Vierecken dasjenige den kleinsten Umfang, dessen Normalen in den Berührungspunkten seiner Seiten eine Raute bilden. Mithin kommt auch dem Parallelogramm $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ diese Minimumeigenschaft zu. Der Wert dieses Minimums ist leicht ermittelt. Da nämlich die Summe zweier benachbarten Seiten $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ des Parallelogramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ gleich

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\ (a_1 + b_1)$$

ist, wenn $2a$, $2b$ und $2a_1$, $2b_1$ die Achsenlängen der Ellipsen $\mathfrak{E}_1$ und C bezeichnen, so ist der Umfang u des Parallelogramms $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$, also der kleinste Wert des Umfanges, den ein der Ellipse C umschriebenes Parallelogramm oder beliebiges Viereck haben kann,

$$u = 4\sqrt{a^2+b^2} = 4\ (a_1 + b_1).$$

Nun ist aber jede Tangente der Ellipse C Seite eines derartigen ausgezeichneten Parallelogramms; also gibt es auch unendlich viele Parallelogramme, die der Ellipse C umschrieben sind und deren Umfang ein Minimum ist. Werden daher die gefundenen Ergebnisse zusammengefasst, so gelangt man zu folgendem

Satz: *Unter allen einer gegebenen Ellipse* C *umschriebenen Vierecken hat das den kleinsten Umfang, bei dem die Normalen in den Berührungspunkten seiner Seiten eine Raute bilden. Es gibt unendlich viele solcher Vierecke, deren Umfang ein Minimum ist. Jede Tangente der Ellipse ist Seite eines derselben; aber der Umfang ist bei allen gleich und zwar gleich der doppelten*

Summe der Achsen der Ellipse, also gleich $4(a_1 + b_1)$. *Alle diese Vierecke, die Parallelogramme sind, sind zugleich einer bestimmten andern Ellipse* $\mathfrak{E}_1$ *eingeschrieben und haben unter allen ihr eingeschriebenen Vierecken den grössten Umfang. (II., 412.)*

Da die Achsen $2a$, $2b$ und $2a_1$, $2b_1$ der Ellipsen $\mathfrak{E}_1$ und C durch die Beziehungen

$$a_1 : b_1 = a^2 : b^2 \quad \text{und} \quad a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$$

mit einander verbunden sind, so finden also für je zwei Ellipsen, deren gleichnamige Achsen aufeinander liegen und nach Grösse diesen beiden Gleichungen genügen, die angegebenen Eigenschaften statt. Unendlich viele Parallelogramme lassen sich also der einen einschreiben und der andern umschreiben. Der Umfang aller dieser Parallelogramme ist konstant und bei der ersten Ellipse ein Maximum, dagegen bei der andern ein Minimum in Bezug auf alle andern Vierecke, die jener eingeschrieben und dieser umgeschrieben sind. Da für jede beliebige Ellipse die Diagonalen eines jeden ihr umschriebenen Parallelogramms konjugierte Durchmesser sind, so fallen auch auf je zwei konjugierte Durchmesser der inneren Ellipse die Diagonalen eines der genannten Parallelogramme und werden durch die äussere Ellipse begrenzt. (II., 413.)

Das System der gleichseitigen Hyperbeln, die einen nach Grösse und Lage gegebenen Durchmesser gemeinsam haben.

Sind A, A^0, A_1, A^0_1 die Ecken eines einer Ellipse $\mathfrak{E}_1$ umgeschriebenen Rechtecks, so ist durch die Punkte A, A^0, A_1, A^0_1 ein Büschel von Kegelschnitten bestimmt, die wegen der Symmetrie von A und A_1, und von A^0 und A^0_1 in Bezug auf M sämtlich AA_1 und $A^0A^0_1$ zu Durchmessern, also den Punkt M zum gemeinsamen Mittelpunkt haben. Da nun durch jeden weiteren fünften Punkt, der innerhalb des von

den Punkten A, A^0, A_1, A^0_1 gebildeten Vierecks liegt, eine Hyperbel $\mathfrak{H}$ aus dem Büschel bestimmt ist, so lässt sich auch durch A, A^0, A_1, A^0_1 und den einen Brennpunkt B von $\mathfrak{E}_1$ eine Hyperbel legen, die dann sofort auch durch den zu B in Bezug auf M symmetrischen zweiten Brennpunkt B_1 hindurchläuft. Somit ist auch BB_1 ein Durchmesser der Kurve. Verbindet man nun A^0 mit B und B_1, so bilden nach einem bekannten Satz die Brennstrahlen BA^0 und B_1A^0 mit den Tangenten AA^0 und A_1A^0 gleiche Winkel, sodass Winkel $AA^0B = A_1A^0B_1$ ist. Sind ferner Q und R die Halbierungspunkte von AA^0 und A^0B, so sind MQ und A_1A^0 und ebenso MR und B_1A^0 parallel. Da also Winkel $A_1A^0B_1 = QMR$ ist, so ist auch Winkel $AA^0B = QMR$. Aber MQ und MR sind als Verbindungslinien des Mittelpunkts M der Hyperbel mit den Halbierungspunkten Q und R der Sehnen AA^0 und A^0B die zu den Richtungen AA^0 und A^0B konjugierten Durchmesser; und da für die Hyperbel $\mathfrak{H}$ die von zwei Durchmessern und ihren konjugierten Durchmessern gebildeten Winkel einander gleich sind, so ist die durch A, A^0, A_1, A^0_1, B gelegte Hyperbel gleichseitig.

Da nun MQ als Höhe des gleichschenkligen Dreiecks AMA^0 auf der Richtung des konjugierten Durchmessers AA^0 senkrecht steht, so stellen MQ und die auf MQ in M errichtete Senkrechte MQ_0 die Achsenrichtungen der gleichseitigen Hyperbel dar, deren Asymptoten alsdann die Halbierungslinien der von den Achsen gebildeten Winkel sind. Somit liegen die vier Ecken eines jeden der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ umschriebenen Rechtecks mit ihren Brennpunkten B und B_1 in einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren Achsen die vom Mittelpunkt M der Ellipse auf die Seiten des Rechtecks gefällten Lote sind.

Aber auch die Ecken der der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ eingeschriebenen Parallelogramme $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ liegen mit B und B_1 in einer Hyperbel $\mathfrak{H}_1$, deren Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_3$ und BB_1 sind. Denn B und B_1 sind Brennpunkte der Ellipse C, deren Tangenten $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}$ sind, gehören also stets dem von dem Parallelogramm begrenzten Flächenstück

an. Sind nun S und T die Halbierungspunkte der Sehnen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_1 B$ der Hyperbel $\mathfrak{H}_1$, also MS und MT die zu den Richtungen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_1 B$ konjugierten Durchmesser, so ist, wie im obigen Falle, Winkel $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1 B = \mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_1 B_1 = SMT$. Aus demselben Grunde wie oben liegen somit auch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, B und B_1 in einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}_1$, die mit der Hyperbel $\mathfrak{H}$ den Durchmesser BB_1 der Länge und Richtung nach gemein hat.

Die Asymptoten dieser Hyperbel ergeben sich sehr einfach als die Halbierungslinien der Winkel, die von zwei konjugierten Durchmessern gebildet werden. Nun sind aber MS und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ konjugierte Richtungen; aber MS fällt, da A der Schnittpunkt der in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ an $\mathfrak{E}_1$ gelegten Tangenten ist, mit MA zusammen, und da $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ und MA^0 parallel sind, so stellen die Halbierungslinien der von MA und MA^0 gebildeten Winkel die Asymptoten der $\mathfrak{H}_1$ dar. Diese Halbierungslinien fallen daher als Senkrechte von M auf die Seiten des Rechtecks $AA^0A_1A^0_1$ mit den Achsen MQ und MQ_0 der $\mathfrak{H}$ zusammen, woraus sofort folgt, dass auch die Achsen der $\mathfrak{H}_1$ sich mit den Asymptoten der $\mathfrak{H}$ decken. Demnach bilden die Achsen und ebenso die Asymptoten der einen Hyperbel mit den Achsen und Asymptoten der andern Hyperbel den Winkel $\frac{\pi}{4}$.

Fällt man nun BX senkrecht zur Hauptachse der Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren Länge 2a sein möge, während 2b die Brennweite der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ bezeichne, so ist nach bekannter Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel

$$MX^2 - XB^2 = a^2,$$

und wird Winkel $BMX = \alpha$ gesetzt, so gilt

$$MX = b \cos \alpha.$$

Hieraus ergibt sich $XB = \sqrt{b^2 \cos^2 \alpha - a^2}$.

Nun ist aber im rechtwinkligen Dreieck BMX

$$MX^2 + XB^2 = BM^2$$

oder $$2b^2 \cos^2 \alpha - a^2 = b^2,$$

also $$a^2 = b^2 (2 \cos^2 \alpha - 1) = b^2 \cos 2\alpha.$$

Wird nun entsprechend die Länge der Hauptachse der Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ mit $2a_1$ bezeichnet und bildet sie mit MB den Winkel β, so gilt ebenso

$$a_1^2 = b^2 \cos 2\beta.$$

Da nun aber, wie oben gezeigt, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ist, so ist

$$a_1^2 = b^2 \sin 2\alpha,$$

also $$a^4 + a_1^4 = b^4.$$

Demnach gilt der

Satz: *Die vier Ecken eines jeden der Ellipse* $\mathfrak{E}_1$ *umgeschriebenen Rechtecks liegen mit den Brennpunkten* B *und* B_1 *der Ellipse in einer gleichseitigen Hyperbel* $\mathfrak{H}$, *die mit* $\mathfrak{E}_1$ *konzentrisch ist; und ebenso liegen die Ecken eines der der Ellipse* $\mathfrak{E}_1$ *eingeschriebenen Parallelogramme, die die Berührungspunkte der Seiten der ihr umschriebenen Rechtecke sind, mit den Brennpunkten* B *und* B_1 *in einer andern gleichseitigen Hyperbel* $\mathfrak{H}_1$, *die mit* $\mathfrak{H}$ *den Durchmesser* BB_1 *gemein hat, also mit ihr und mit* $\mathfrak{E}_1$ *konzentrisch ist. Somit ergeben sich zwei Systeme* $S(\mathfrak{H})$ *und* $S(\mathfrak{H}_1)$ *von gleichseitigen Hyperbeln, die den reellen Durchmesser* BB_1 *gemeinsam haben. Die Hauptachsen* 2a *und* $2a_1$ *je zweier zusammengehörigen gleichseitigen Hyperbeln* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{H}_1$ *aus dem einen und dem andern System bilden einen konstanten Winkel* $\frac{\pi}{4}$, *und zudem ist die Summe der Biquadrate dieser Achsen konstant und zwar dem Biquadrate jenes Durchmessers* BB_1 *oder* 2b *gleich, oder*

$$a^4 + a_1^4 = b^4. \qquad \textit{(II., 413, 414.)}$$

Da für die Achse 2a einer jeden gleichseitigen Hyperbel der beiden Systeme die Beziehung $a^2 = b^2 \cos 2\alpha$ gilt, so kommt der Hyperbel, für die $\alpha = 0$ ist, das Maximum $2a = 2b$ der Achsenlänge zu, während die Hyperbel, die durch $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gegeben ist, die kleinste Achsenlänge $2a = 0$ besitzt.

Man sieht ohne grosse Mühe ein, dass die beiden auf diese Weise bestimmten Systeme gleichseitiger Hyperbeln $S(\mathfrak{H})$ und $S(\mathfrak{H}_1)$ in Wirklichkeit nur ein einziges System darstellen. Denn da die durch $A, A^0, A_1, A^0_1, B, B_1$ laufende gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ und die Ellipse $\mathfrak{E}_1$ konzentrisch sind, so sind die vier Schnittpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}^0_1$ beider Kurven die Ecken eines Parallelogramms $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}^0_1$. Nun gehören $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^0$ der gleichseitigen Hyperbel an; also ist der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^0B$ gleich dem Winkel, der von den zu den Richtungen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}^0B$ konjugierten Durchmessern gebildet wird, und dieser Winkel ist, wie auf Seite 107 bewiesen wurde, gleich dem Winkel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}^0B_1$. Da aber Normale und Tangente der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{A}^0$ die von den Brennstrahlen $B\mathfrak{A}^0$ und $B_1\mathfrak{A}^0$ gebildeten Winkel halbieren, so hat das der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ eingeschriebene Parallelogramm $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}^0_1$ die Eigenschaft, dass der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1$ und, wie in derselben Weise gezeigt werden kann, alle vier Winkel durch die Tangenten und Normalen der Ellipse in den Scheiteln gehälftet werden. $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}^0_1$ sind daher die Berührungspunkte der Seiten eines der Ellipse umschriebenen Rechtecks. Die Hyperbel $\mathfrak{H}$ gehört demnach nicht nur dem System $S(\mathfrak{H})$, sondern auch dem System $S(\mathfrak{H}_1)$ an.

Dass aber auch umgekehrt jede Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ des zweiten Systems eine Hyperbel des System $S(\mathfrak{H})$ ist, kann man wie folgt nachweisen. Die durch $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, B, B_1$ laufende Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ schneidet den mit ihr konzentrischen Direktorkreis M_0 der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ in den Ecken G, G_1, G_2, G_3 eines Rechtecks $GG_1G_2G_3$. Wegen der schon mehrmals genannten Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel ist dann der Winkel GG_1B gleich dem Winkel, der von den zu GG_1 und G_1B konjugierten Durchmessern gebildet wird, der ferner mit dem Winkel $G_2G_1B_1$ gleiche Grösse hat. Mithin bilden G_1G und G_1G_2 mit den von G_1 an die Ellipse $\mathfrak{E}_1$ gelegten Tangenten gleiche Winkel. Da aber G_1 als ein Punkt des Direktorkreises von $\mathfrak{E}_1$ an die Ellipse rechtwinklige Tangenten sendet und GG_1 auf G_1G_2 senkrecht steht, so stellen G_1G und G_1G_2 die von G_1 an die Ellipse gelegten Tangenten

dar. Da sich dasselbe auch für die drei andern Ecken des Rechtecks $G G_1 G_2 G_3$ nachweisen lässt, so schneidet die Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ den Kreis M_0 in den Ecken eines der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ umschriebenen Rechtecks. Damit gehört die Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ auch dem System $S(\mathfrak{H})$ an. Demnach gilt der

Satz: *Die beiden Systeme gleichseitiger Hyperbeln* $S(\mathfrak{H})$ *und* $S(\mathfrak{H}_1)$ *sind mithin ein und dasselbe System* $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$, *das dadurch definiert ist, dass alle Hyperbeln gleichseitig sind und den Durchmesser* BB_1 *gemeinsam haben. (II., 414.)*

Die eben gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch wie folgt in Worte fassen.

Satz: *Jede gleichseitige Hyperbel* $\mathfrak{H}$ *oder* $\mathfrak{H}_1$, *die mit einer gegebenen Ellipse* $\mathfrak{E}_1$ *konzentrisch ist und durch deren Brennpunkte* B *und* B_1 *geht, schneidet diese in den Ecken eines ihr eingeschriebenen Parallelogramms, welche die Berührungspunkte der Seiten eines ihr umschriebenen Rechtecks sind. (II., 414.)*

Ist nun $\mathfrak{H}$ eine beliebige Hyperbel des Systems $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$, deren Hauptachse die Länge $2a$ haben möge, so kann man leicht einen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks MTT_1 angeben, das von der Tangente TT_1 in ihrem Hauptachsenscheitel P und den beiden unter einem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen den Durchmesser BB_1 geneigten Graden MT und MT_1 gebildet wird. Setzt man nämlich, wie früher, Winkel $BMP = \alpha$, so ist, da

$$MP^2 = a^2 = b^2 \cos 2\alpha \qquad \text{ist,}$$

im Dreieck MPT $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{a}{MT}$

und im Dreieck MPT_1 $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{a}{MT_1}.$

Mithin gilt für den Flächeninhalt $\mathfrak{F}$ des rechtwinkligen Dreiecks MTT_1

$$2\mathfrak{I} = \mathrm{M\,T}\cdot\mathrm{MT_1} = \frac{\mathrm{a}^2}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$$

oder

$$\mathfrak{I} = \frac{2\,\mathrm{a}^2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{\mathrm{a}^2}{\cos 2\alpha} = \mathrm{b}^2.$$

Da somit die Tangente $\mathrm{TT_1}$ in den Scheiteln der Hauptachse einer jeden gleichseitigen Hyperbel der $\mathrm{S}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_1)$ mit den beiden auf einander senkrechten Graden MT und $\mathrm{MT_1}$ stets ein Dreieck von konstantem Inhalt bildet, so umhüllen bekanntlich alle diese Tangenten eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_0$, deren Asymptoten die beiden Graden MT und $\mathrm{MT_1}$, deren Achsen also die Halbierungslinien der von MT und $\mathrm{MT_1}$ gebildeten Winkel sind und deren Hauptachse die Länge 2b hat. Da demnach $\mathfrak{H}_0$ durch B und $\mathrm{B_1}$ läuft, so gehört $\mathfrak{H}_0$ selbst dem System $\mathrm{S}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_1)$ an und ist, wie bereits ermittelt wurde, diejenige Hyperbel $\mathfrak{H}$, der die grösste Achse zukommt. Daraus folgt der

Satz: *Die Tangenten in den Scheiteln der Hauptachsen aller gleichseitigen Hyperbeln des Systems* $\mathrm{S}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_1)$ *berühren sämtlich diejenige* $\mathfrak{H}_0$ *unter ihnen, welche die grösste Achse, nämlich den allen diesen Hyperbeln gemeinsamen Durchmesser* $\mathrm{BB_1}$ *zur Hauptachse hat. (II., 414.)*

Nun erfüllen, wie bekannt ist, die Fusspunkte der aus dem Mittelpunkt M einer gleichseitigen Hyperbel auf ihre sämtlichen Tangenten gefällten Lote eine mit der Hyperbel konzentrische Lemniskate, deren Achse nach Grösse und Richtung mit der der gleichseitigen Hyperbel zusammenfällt. Da aber diese Fusspunkte zugleich die Scheitel der Hauptachsen aller Hyperbeln des Systems sind, so gilt der

Satz: *Die Hauptscheitel sämtlicher Hyperbeln des* $\mathrm{S}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_1)$ *liegen in einer Lemniskate* $\mathrm{L_1}$, *die den gemeinsamen Durchmesser* $\mathrm{BB_1}$ *aller Hyperbeln zur Achse und ihren gemeinsamen Mittelpunkt* M *ebenfalls zum Mittelpunkt hat. (II., 414.)*

Da nun die Brennpunkte einer jeden gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$, deren Hauptachse die Länge 2a besitzt, vom Mittelpunkt der Kurve die Entfernung $a\sqrt{2}$ haben, so müssen auch die Brennpunkte aller Hyperbeln des Systems $S(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_1)$ einer Lemniskate angehören, die mit der Lemniskate L_1 konzentrisch ist und dieselbe Achse wie diese besitzt, deren Achsenlänge aber $2b\sqrt{2}$ ist.

Satz: *Auch die Brennpunkte aller Hyperbeln des* $S(\mathfrak{H},\mathfrak{H}_1)$ *erfüllen eine Lemniskate* L_2, *deren Achse auf die Achse der obigen Lemniskate* L_1 *fällt und die Eigenschaft hat, dass ihr Quadrat gleich dem doppelten Quadrat der Achse der Lemniskate* L_1 *ist. (II., 414.)*

Ferner umhüllen, wie man leicht erkennt, die Leitlinien aller Hyperbeln des Systems eine andre gleichseitige Hyperbel, und die Fusspunkte der von M auf ihre Tangenten gefällten Lote liegen in einer dritten Lemniskate L_3, deren Achse gleich der Hälfte der Achse der L_2 ist.

Das System der gleichseitigen Hyperbeln $\mathfrak{H}$ ist, wie auf Seite 111 nachgewiesen wurde, einfach dadurch definiert, dass alle Hyperbeln einen Durchmesser BB_1 gemein haben. Mithin können die bisher gewonnenen Ergebnisse wie folgt zusammengefasst werden.

Satz: *Das System der gleichseitigen Hyperbeln* $\mathfrak{H}$, *die einen nach Grösse und Lage gegebenen Durchmesser* BB_1 *gemein haben, besitzt die Eigenschaft, dass die Tangenten in den Hauptscheiteln aller Hyperbeln sämtlich eine und dieselbe und zwar diejenige* $\mathfrak{H}_0$ *unter ihnen berühren, die jenen Durchmesser zur Hauptachse hat. Ihre Hauptscheitel liegen alle in einer Lemniskate* L_1, *die den Durchmesser* BB_1 *zur Achse hat, und auch ihre Brennpunkte erfüllen eine Lemniskate* L_2, *während die Fusspunkte der von dem gemeinsamen Mittelpunkt aller Hyperbeln auf ihre Leitlinien gefällten Lote einer dritten Lemniskate* L_3 *angehören. Die Längen* $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$ *der Achsen dieser drei Kurven* L_1, L_2, L_3 *stehen in dem Verhältnis*

$$b_1 : b_2 : b_3 = \sqrt{2} : 2 : 1. \qquad (II., 414.)$$

Jede der Hyperbeln des Systems $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$ lieferte, wie oben gezeigt wurde, in ihren Schnittpunkten mit dem Direktorkreise M_0 der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ die Ecken eines der Ellipse umschriebenen Rechtecks. Die Berührungspunkte seiner Seiten bilden, wie sich ferner ergab, die Ecken eines der $\mathfrak{E}_1$ eingeschriebenen Parallelogramms, das selbst wieder einer mit $\mathfrak{E}_1$ konzentrischen Ellipse C umgeschrieben und dessen Umfang gleich dem doppelten Durchmesser des Kreises M_0 ist. Wird nun ein beliebiger mit M_0 und allen Hyperbeln $\mathfrak{H}$ konzentrischer Kreis $\mathfrak{M}$ konstruiert, dessen Durchmesser $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ grösser als BB_1 ist, so schneidet auch er jede der Hyperbeln in vier Punkten, die stets ein Rechteck $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}^0_1$ festlegen. Dieses ist entsprechend den obigen Ausführungen einer andern Ellipse umschrieben, nämlich der Ellipse $\mathfrak{E}$, deren Brennpunkte auch B und B_1 sind. Ferner sind auch die Verbindungslinien der Berührungspunkte seiner Seiten mit $\mathfrak{E}$ die Tangenten einer neuen Ellipse $\mathfrak{C}$, die ein Parallelogramm bilden, dessen Umfang konstant und zwar gleich dem doppelten Durchmesser $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ des Kreises $\mathfrak{M}$ ist. Somit besteht der

Satz: *Jeder mit den gleichseitigen Hyperbeln* $\mathfrak{H}$ *konzentrische Kreis* $\mathfrak{M}$, *dessen Durchmesser grösser als* BB_1 *ist, schneidet jede derselben in den Ecken eines Rechtecks; und alle diese Rechtecke sind einer und derselben Ellipse, welche die Endpunkte* B *und* B_1 *seines Durchmessers zu Brennpunkten hat, umschrieben und berühren sie in vier solchen Punkten, die ein Parallelogramm von konstantem Umfang bilden, das einer andern Ellipse umschrieben ist. (II., 414.)*

Da nun aber ferner die Ellipse $\mathfrak{E}_1$ jede der Hyperbeln des $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$ in vier Punkten schneidet, die ein Parallelogramm bilden, so kommt man, wenn man bei Festhaltung der Brennpunkte B und B_1 die Ellipse $\mathfrak{E}_1$ ständig verändert, zu dem

Satz: *Jede Ellipse* $\mathfrak{E}$, *die die Endpunkte des Durchmessers* BB_1 *zu Brennpunkten hat, schneidet jede Hyperbel* $\mathfrak{H}$

in den Ecken eines Parallelogramms. Alle diese Parallelogramme haben gleichen Umfang und sind zugleich einer andern Ellipse $\mathfrak{E}$ umschrieben, die mit jener konzentrisch ist.

Wie sich oben herausstellte, liegen die Hauptscheitel aller Hyperbeln des $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$ in einer Lemniskate, die BB_1 zur Achse und M zum Mittelpunkt hat. Ferner besteht, wie bewiesen wurde, zwischen den Längen $2a$ und $2a_1$ der Hauptachsen zweier Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$, deren Achsen um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen einander geneigt sind, und der Länge $2b$ des allen Hyperbeln gemeinsamen Durchmessers BB_1 die Beziehung

$$a^4 + a_1^4 = b^4.$$

Da nun die Achsen der Hyperbeln die Durchmesser der Lemniskate sind, so folgt aus dem Gesagten der

Satz: *Die Lemniskate hat die Eigenschaft, dass die Summe der Biquadrate je zweier ihrer Durchmesser, die den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschliessen, konstant und zwar dem Biquadrat ihrer Achse gleich ist. (II., 414.)*

Dieser Satz kann aber für die Lemniskate auch unmittelbar nachgewiesen werden. Ist nämlich der Mittelpunkt M der Kurve der Ursprung und ihre Achse die Polarachse, so lautet die Polargleichung der Lemniskate

$$r^2 = b^2 \cos 2\varphi,$$

worin $2b$ die Länge der Achse bezeichnet. Für einen beliebigen Radiusvektor a, der mit der Polarachse den Winkel φ_1 bildet, gilt daher

$$a^2 = b^2 \cos 2\varphi_1,$$

und ist a_1 der Radiusvektor, der mit dem Vektor a einen Winkel von der Grösse $\frac{\pi}{4}$ einschliesst, so ist entsprechend

$$a_1^2 = b^2 \cos 2\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

oder $$a_1^2 = -b^2 \sin 2\varphi_1.$$

Hieraus folgt

$$a^4 + a_1^4 = b^4.$$

Man kann auch durch die Methoden der analytischen Geometrie zu denselben Ergebnissen gelangen.

Die Gleichung der Tangente der auf Mittelpunkt und Achsen bezogenen Ellipse

$$\mathfrak{E}_1 \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

lautet bekanntlich in der Form, die nur den Richtungsfaktor m enthält,

$$t \equiv y - mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0.$$

Mithin sind die beiden Seiten AA^0 und $A_1A^0_1$ eines beliebigen der $\mathfrak{E}_1$ umschriebenen Rechtecks $AA^0A_1A^0_1$ gegeben durch die Gleichungen

$$T = y - mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0$$

und $$T_1 \equiv y - mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0.$$

Stellt dann $$M_0 \equiv x^2 + y^2 - (a^2 + b^2) = 0$$

den Direktorkreis der Ellipse dar, so ist die Gleichung eines jeden durch A, A^0, A_1, A^0_1 laufenden Kegelschnitts K von der Form

$$K \equiv TT_1 + \lambda M_0 = 0,$$

also

$$K = y^2 - 2mxy + m^2x^2 - a^2m^2 - b^2 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda(a^2 + b^2) = 0.$$

Soll nun K auch durch den Brennpunkt B hindurchlaufen, so müssen seine Koordinaten $x = c$, $y = 0$ die Gleichung befriedigen; da dann

$$\lambda = -\frac{1}{2}(1 + m^2)$$

sich ergibt, so lautet die Gleichung von K nach Einsetzung dieses Wertes und Vereinfachung

$$x^2 + \frac{4m}{1 - m^2}\, xy - y^2 - c^2 = 0,$$

die in der Tat eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ darstellt. Ist nun α der Winkel, den die eine Achse der Hyperbel mit BB_1 bildet, so gilt, wie sich aus der Gleichung ergibt,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,m}{1 - m^2},$$

also $$\operatorname{tg}\alpha = m.$$

Die eine Achse der Hyperbel $\mathfrak{H}$ ist somit zu den Seiten AA^0 und $A_1A^0_1$ des Rechtecks $AA^0A_1A^0_1$ und daher die andre zu seinen Seiten AA_1 und $A^0A^0_1$ parallel.

Aehnlich ergibt sich auch die Gleichung des Kegelschnitts, der durch die Berührungspunkte $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ der Seiten des Rechtecks $AA^0A_1A^0_1$ und durch die Brennpunkte B und B_1 hindurch geht. Da nämlich

$$x_0 = \frac{a^2 m}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2}} \quad \text{und} \quad y_0 = -\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}$$

die Koordinaten des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ von AA^0 und

$$x_1 = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} \quad \text{und} \quad y_1 = -\frac{b^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$$

die von $\mathfrak{G}_1$ sind, also

$$D \equiv y + \frac{b^2}{a^2 m}\, x = 0$$

und

$$D_1 \equiv y - \frac{b^2 m}{a^2}\, x = 0$$

die Gleichungen der Durchmesser $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_3$ darstellen, so hat die Gleichung eines beliebigen durch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ laufenden Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ die Form

$$\mathfrak{K} \equiv D \cdot D_1 + \lambda\, \mathfrak{E}_1 = 0,$$

wenn $$\mathfrak{E}_1 \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

die Gleichung der Ellipse $\mathfrak{E}_1$ ist. Damit nun auch der Punkt B, dessen Koordinaten $x = c$, $y = 0$ sind, dem $\mathfrak{K}$ angehört, muss

$$\lambda = -\frac{c^2}{a^4}$$

gesetzt werden, womit dann nach allen Vereinfachungen die Gleichung von $\mathfrak{K}$ die Gestalt annimmt

$$\mathfrak{K} \equiv x^2 - \frac{m^2 - 1}{m}\, xy - y^2 - c^2 = 0.$$

Aus ihrer Form ergibt sich, dass $\mathfrak{K}$ eine mit $\mathfrak{H}$ konzentrische gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ ist und mit $\mathfrak{H}$ dem System gleichseitiger Hyperbeln

$$S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1) \equiv x^2 + 2\mu xy - y^2 - c^2 = 0$$

angehört, die den Durchmesser $y = 0$ von der Länge $BB_1 = 2c$ gemeinsam haben. Da die eine Achse der Hyperbel $\mathfrak{H}_1$ mit der Graden BB_1 einen Winkel β bildet, der der Beziehung

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{m^2 - 1}{2m} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

genügt, so bilden, wie auch oben bewiesen wurde, die Hauptachsen zweier zusammengehörenden Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ den Winkel $\frac{\pi}{4}$.

Für jede Hyperbel des Systems $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$ hat bei Anwendung der bekannten Formel das Quadrat der halben Hauptachse a den Wert

$$a^2 = \frac{c^2}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Da nun für zwei zusammengehörige Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ das Produkt der Parameter $\mu = \operatorname{tg} 2\alpha$ und $\mu_1 = \operatorname{tg} 2\beta$ den Wert -1 besitzt, so gelten für ihre Hauptachsen $2a$ und $2a_1$ die Gleichungen

$$a^2 = \frac{c^2}{\sqrt{1 + \mu_1^2}} \quad \text{und} \quad a_1^2 = \frac{c^2 \mu_1}{\sqrt{1 + \mu_1^2}},$$

aus denen die schon oben abgeleitete Beziehung

$$a^4 + a_1^4 = c^4$$

folgt.

Da sich durch Elimination von μ aus den beiden Gleichungen

$$a^2 = \frac{c^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{und} \quad \mu = \operatorname{tg} 2\alpha$$

die Gleichung $a^2 = c^2 \cos 2\alpha$

ergibt, die die Polargleichung einer Lemniskate ist, so erfüllen die Hauptscheitel aller Hyperbeln des $S(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1)$ eine Lemniskate L_1, deren Achse $2c$ sowohl ihrer Richtung als auch ihrer Länge mit BB_1 nach zusammenfällt.

Es handelt sich nun darum, die Einhüllende der Tangenten in den Scheiteln der Hauptachsen der gleichseitigen

Hyperbeln zu ermitteln. Wie eben gezeigt, ist die Länge $2a$ der Hauptachse einer jeden Hyperbel $\mathfrak{H}$ gegeben durch

$$a^2 = c^2 \cos 2\alpha.$$

Ist daher P der eine Scheitel der $\mathfrak{H}$, so gelten für seine Koordinaten x und y die Beziehungen

$$x^2 + y^2 = c^2 \cos 2\alpha$$

und

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

oder wenn $\operatorname{tg}\alpha$ durch die schon früher genannte Grösse m ersetzt wird,

$$x^2 + y^2 = c^2 \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

und

$$y = mx.$$

Aus beiden Gleichungen ergeben sich als Koordinaten des Scheitels P die Werte

$$x_P = \frac{c\sqrt{1 - m^2}}{1 + m^2} \quad \text{und} \quad y_P = \frac{cm\sqrt{1 - m^2}}{1 + m^2}.$$

Die Tangente im Scheitel P der Hyperbel $\mathfrak{H}$ hat demnach als Senkrechte auf MP in P die Gleichung

$$t \equiv x + my - c\sqrt{1 - m^2} = 0.$$

Die von den Tangenten in den Scheiteln sämtlicher Hyperbeln $\mathfrak{H}$ eingehüllte Kurve erhält man dann, wenn man aus dieser Gleichung und der aus ihr durch Differentiation nach dem Parameter m erhaltenen Gleichung

$$t'_m \equiv y + \frac{cm}{\sqrt{1 - m^2}} = 0$$

die Grösse m eliminiert. Da

$$m = -\frac{xy}{y^2 + c^2} \quad \text{und} \quad 1 - m^2 = \frac{(y^2 + c^2)^2 - x^2y^2}{(y^2 + c^2)^2}$$

ist, so findet man als Gleichung des gesuchten Ortes die Gleichung

$$b^2x^2 = (y^2 + c^2)^2 - x^2y^2,$$

die sich auch in der Form

$$(x^2 - y^2 - c^2)(y^2 + c^2) = 0$$

schreiben lässt. Sieht man daher von dem imaginären Gradenpaar $y^2 + c^2 = 0$ ab, so ist, wie auch oben gefunden

Lebenslauf.

Ich, Hermann Starostzik, katholischer Konfession, wurde am 27. April 1882 zu Breslau geboren. Im April 1893 trat ich in die Breslauer Oberrealschule ein und verliess sie im April 1902 mit dem Zeugnis der Reife. Auf Grund desselben wurde ich kurz darauf an der Universität Breslau immatrikuliert, um mich hauptsächlich mathematischen Studien zu widmen. Am 1. Mai 1907 bestand ich das Examen rigorosum. Ich hörte die Vorlesungen der Herren Professoren Baumgartner, Franz, Freudenthal, Kneser, London, Lummer, Meyer, Neumann, Pringsheim, Rosanes, Schäfer, Sturm. Ferner besuchte ich das Praktikum des Herrn Professor Lummer und nahm teil an den seminaristischen Uebungen der Herren Professoren London, Rosanes, Sturm.

Ich benutze diese Gelegenheit, allen genannten Herren für die Förderung meiner Studien meinen aufrichtigen Dank abzustatten. Besonders bleibe ich Herrn Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Sturm für seine gütige Unterstützung bei Abfassung meiner Dissertation zu lebhaftem Dank verpflichtet.